QA
36
.E56
v.3B
pt.1

12. Heft 1.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE
DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN UND WIEN
UND DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN. . . . . H. BURKHARDT IN ZÜRICH.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN. . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN.
— V: PHYSIK, IN 2 TEILEN. . . . . A. SOMMERFELD IN AACHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . . K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
— VII: HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND, SOWIE GENERALREGISTER . . . . . (IN VORBEREITUNG).

BAND III2. HEFT 1. AUSGEGEBEN AM 9. MÄRZ 1903.

MIT 14 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

☞ Bisher erschien: Band I, Heft 1—7; Band II1, Heft 1—4; Band II2, Heft 1; Band III2, Heft 1; Band III3, Heft 1; Band IV1, Heft 1—2 und IV2, Heft 1.

☞ Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlufshefte eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Eine neue Abteilung ist in dem Archiv der Mathematik und Physik von den Herren E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke eingerichtet worden, nämlich ein Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Unter dieser Abteilung nimmt die Redaktion des Archivs ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beigesteuert die Herren W. Ahrens, A. v. Braunmühl, T. J. I'A. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, E. Jahnke, F. Klein, M. Krause, A. Loewy, J. Lüroth, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.

Inhalt des vorliegenden Heftes.

Seite

III C 1. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. Von **Friedrich Dingeldey** in Darmstadt. (Mit 14 Figuren im Text) 1

Unter der Presse:

Band II. Teil 1. Variationsrechnung. Von **A. Kneser** in Berlin.

- III. - 1. Prinzipien der Geometrie. Von **F. Enriques** in Bologna.
- III. - 3. Besondere transcendente Kurven. Von **G. Scheffers** in Darmstadt. — Besondere transcendente Flächen. Von **R. v. Lilienthal** in Münster i/W. — Abbildung und Abwickelung zweier Flächen auf einander. Von **A. Voss** in Würzburg.
- IV. - 1. Geometrie der Massen. Von **G. Jung** in Mailand. — Die graphische Statik der starren Körper. Von **L. Henneberg** in Darmstadt.
- IV. - 2. Aërodynamik. Von **S. Finsterwalder** in München. — Ballistik. Von **C. Cranz** in Stuttgart.
- V. - 1. Mafs und Messen. Von **C. Runge** in Hannover. — Gravitation. Von **J. Zenneck** in Strafsburg. — Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik. Von **G. H. Bryan** in Bangor. — Wärmeleitung. Von **E. W. Hobson** in Cambridge.
- V. - 2. Standpunkt der Fernwirkung, die Elementargesetze. Von **R. Reiff** in Stuttgart. — Standpunkt der Feldwirkung, Maxwells Theorie u. Verwandtes. Von **H. A. Lorentz** in Leiden. — Weiterbildung der Maxwell'schen Theorie, Elektronentheorie. Von **H. A. Lorentz** in Leiden. — Beziehungen zwischen Elektricität und elastischer Deformation. Von **F. Pockels** in Heidelberg.

Disposition von Band III: Geometrie, in 3 Teilen.

I. Teil: A. Rein geometrische Theorien.

1. Prinzipien der Geometrie: **F. Enriques** in Bologna.
2. Elementargeometrie: **M. Simon** in Strassburg i. E. und **J. Neuberg** in Lüttich.
3. Raumeinteilungen und Polyeder: **H. Steinitz** in Charlottenburg.
4. Analysis situs: **P. Heegaard** in Vedbaek bei Kopenhagen.
5. Projektive Geometrie: **A. Schoenflies** in Königsberg.
6. Darstellende Geometrie: **E. Papperitz** in Freiberg i. S. (Mit Anhang üb. graphische Darstellungen u. Modelle.)
7. Geometrie d. Kreise u. Kugeln: **H. Burkhardt** in Zürich.

B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

1a. Die Grundbegriffe der Geometrie in analytischer Fassung: **H. v. Mangoldt** in Aachen.
1b. Algebraische Gesichtspunkte u. Methoden: **G. Fano** in Turin.
2. Die verschiedenen Koordinatensysteme: **E. Müller** in Wien.
3. Systeme geometr. Analyse: **H. Burkhardt** in Zürich.
4. Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus: **J. Sommer** in Bonn.

II. Teil: C. Algebraische Geometrie.

1. Kegelschnitte: **F. Dingeldey** in Darmstadt.
2. Allgemeine Theorie d. höheren ebenen algebraischen Kurven: **L. Berzolari** in Pavia.
3. Spezielle ebene algebr. Kurven: **G. Kohn** in Wien.
4. Flächen II. Ordnung: **O. Staude** in Rostock.
5. Allgem. Theorie der höheren algebraischen Flächen: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Bologna.
6. Spezielle algebraische Flächen: **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
7. Algebraische Raumkurven u. abwickelbare Flächen: **K. Rohn** in Dresden.
8. Mehrdimensionale Räume: **C. Segre** in Turin.
9. Liniengeometrie und Geometrie höherer Raumelemente: **E. Wälsch** in Brünn.
10. Algebraische Transformationen u. Korrespondenzen: **G. Castelnuovo** in Rom u. **F. Enriques** in Bologna.
11. Abzählende Methoden: **H. G. Zeuthen** i. Kopenhagen.

III. Teil: D. Differentialgeometrie.

1, 2. Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Kurven u. Flächen: **H. v. Mangoldt** in Aachen.
3. Kurven auf den Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster.
4. Besondere transcendente Kurven: **G. Scheffers** in Darmstadt.
5. Besondere transcendente Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster.
6a. Abwickelung und Abbildung zweier Flächen auf einander: **A. Voss** in Würzburg.
6b. Andere Differentialgleichungen der Geometrie: **C. Guichard** in Clermont-Ferrand.
7. Berührungstransform.: **G. Scheffers** in Darmstadt.
8. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen: **H. Liebmann** in Leipzig.
9. Differentielle Liniengeometrie u. Geometrie höherer Raumelemente: **E. Wälsch** in Brünn.
10. Differentialgeometrie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten: **P. Stäckel** in Kiel.
11. Approximative Integration der Differentialgleichungen: **K. Heun** in Karlsruhe.

III C 1. KEGELSCHNITTE UND KEGELSCHNITTSYSTEME.

Von

FRIEDRICH DINGELDEY

in Darmstadt.

Inhaltsübersicht.

I. Der Kegelschnitt als Einzelgebilde.

A. Elementare Erzeugungsweisen und Eigenschaften.

1. Schnitt von Kegel und Ebene.
2. Konstante Summe oder Differenz der Abstände von zwei festen Punkten.
3. Diskussion der Gleichungen für Ellipse und Hyperbel.
4. Definition der Kegelschnitte durch Brennpunkt und Leitlinie.
5. Sätze von *Dupin* und *Dandelin*.

B. Allgemeine Theorie der Kegelschnitte.

6. Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel oder Punktreihen.
7. Gleichung der C_2 in Punktkoordinaten.
8. Schnittpunkte einer Geraden mit der C_2. Pol und Polare.
9. Gleichung der Kurve 2. Klasse C^2.
10. Weitere Sätze über Pol und Polare. Polarsystem. Poldreieck.
11. Konjugierte Durchmesser.
12. Kriterien der C_2 und C^2.
13. Axen der Kegelschnitte. Imaginäres Kreispunktepaar.
14. Transformation der C_2 auf die Axen.
15. Besondere Fälle der Axentransformation.
16. Direktorkreis. Ähnliche Kegelschnitte.
17. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser. Umschriebene oder eingeschriebene Parallelogramme.
18. Satz von *Pascal*.
19. Satz von *Brianchon*. Reziproke Polaren.
20. Nähere Untersuchung der Konfiguration des *Pascal*'schen Sechsecks.
21. Gewisse Reziprozitäten in der *Pascal*'schen Konfiguration.
22. Weitere Untersuchungen über das *Pascal*'sche Sechseck.
23. Metrische Relationen bei eingeschriebenen oder umschriebenen Polygonen.
24. Veränderliche eingeschriebene Polygone.
25. Konstruktion gewisser eingeschriebener Polygone.
26. Schliessungssatz von *Poncelet*.
27. Zusammenhang des Schliessungsproblems mit den elliptischen Funktionen.
28. Weitere Arbeiten zum Schliessungstheorem.

29. Alte und neuere Definitionen der Brennpunkte.
30. Weitere Brennpunktseigenschaften.
31. Gleichungen zur Bestimmung der Brennpunkte und Direktricen.

C. Normale und Krümmungskreis.

32. Normale eines Kegelschnittpunktes.
33. Die von irgend einem Punkt P nach einem Kegelschnitt zu ziehenden Normalen.
34. Weitere Untersuchungen zum Normalenproblem.
35. Besondere einfache Fälle des Normalenproblems.
36. Krümmungskreis.
37. Satz von *Steiner* über Krümmungskreise.
38. Beziehungen zwischen Krümmungsradien verschiedener Punkte.
39. Krümmungsradien sich berührender Kegelschnitte.
40. Evolute.

D. Quadratur und Rektifikation.

41. Quadratur.
42. Rektifikation. Sätze von *Fagnano, Landen, Euler* u. A.
43. Untersuchungen von *Legendre* und *Talbot.*
44. Reihenentwickelungen.

E. Apparate zum Zeichnen der Kegelschnitte.

45. Apparate zum Zeichnen der Kegelschnitte.

II. Kegelschnittsysteme.

A. Kegelschnittbüschel.

46. Schnittpunkte und gemeinsames Poldreieck zweier Kegelschnitte.
47. *Desargues-Sturm*'scher Satz.
48. *Staudt*'sche Kegelschnitte.
49. Polkegelschnitt einer Geraden. Mittelpunktskegelschnitt.
50. Im Büschel enthaltene Kurvenarten.
51. Büschel mit einem oder mit unendlich vielen Kreisen.
52. Ähnliche Kegelschnitte des Büschels und solche von kleinstem oder grösstem Axenprodukt.
53. Doppelverhältnis der Grundpunkte.
54. Ort für die Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels.
55. Einige geometrische Örter.

B. Kegelschnittscharen.

56. Gemeinsames Poldreiseit.
57. Mittelpunktsgerade. Polarkegelschnitt.
58. Art der in einer Schar enthaltenen Kurven.
59. Ähnliche Kegelschnitte der Schar und solche von grösstem Axenprodukt.
60. Direktorkreise der Scharkurven.
61. Ort für die Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar.
62. Einige geometrische Örter.
63. Schar der einem Dreiseit eingeschriebenen Parabeln.
64. Scharen von Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkt.
65. Konfokale Kegelschnitte.
66. Elliptische Koordinaten.
67. Sätze von *Chasles.*

68. Polarkegelschnitt der konfokalen Schar.
69. Weitere Sätze von *Chasles,* vergleichbare Bögen.
70. Büschelschar sich doppelt berührender Kegelschnitte.

C. Gemischte Kegelschnittsysteme.

71. Das System $S(3p, 1g)$.
72. Das System $S(3g, 1p)$.
73. Das System $S(2p, 2g)$.
74. Das System der einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise.
75. Verschiedene andere Kegelschnittsysteme.
76. Zahl der Kegelschnitte bei gegebenen Bedingungen, Charakteristikentheorie.

D. Kegelschnittnetze.

77. Kegelschnittnetz und *Hesse*'sche Kurve des Netzes.
78. *Cayley*'sche Kurve des Netzes.
79. System konischer Polaren einer C_3.
80. Netze, deren *Hessiane* oder *Cayley*'sche Form verschwindet.

E. Kegelschnittgewebe.

81. Kegelschnittgewebe; seine *Hessiane* und *Cayley*'sche Kurve.

F. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme in konjugierter Lage.

82. Kegelschnitte in konjugierter Lage.
83. Weitere Untersuchungen über konjugierte Kegelschnitte.
84. Kegelschnittsysteme in konjugierter Lage.
85. Besondere Fälle.

G. Invarianten von zwei und drei Kegelschnitten.

86. Simultane Invarianten zweier C_2.
87. Beziehungen zwischen einzelnen Formen.
88. Taktinvariante. Kombinante $\psi(x, x)$.
89. Quadratische ternäre und biquadratische binäre Form.
90. Invarianten dreier Kegelschnitte.

Litteratur.

1. Ältere Litteratur.

Apollonius von Perga, 8 Bücher Kegelschnitte, um 225 v. Chr. Deutsche Bearbeitung von *H. Balsam,* Berlin 1861. *Apollonii* Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit *J. L. Heiberg,* 2 Bde., Leipzig 1890—1893 (Apollonius). Engl. Ausgabe von *T. L. Heath,* Cambridge 1898.

Pappus, 8 Bücher Collectio, um 300 n. Chr. Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt. Edidit *F. Hultsch,* 3 Bde., Berlin 1876—1878 (besonders Buch 7).

R. Descartes, Géométrie, Leyden 1637. Deutsche Übersetzung von *L. Schlesinger,* Berlin 1894.

G. Desargues, Brouillon project d'une atteinte aux évènemens des rencontres d'un cone avec un plan, Paris 1639, in Oeuvres de Desargues réunies et analysées par *Poudra,* Bd. 1, Paris 1864.

J. Wallis, Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis, 1655, abgedruckt in seinen Opera mathematica 1, Oxford 1699.

Ph. De la Hire, Sectiones conicae, Paris 1685 (Sect. con.).
G. F. De l'Hospital „Traité analytique des sections coniques", Paris 1720, verfasst vor 1704 (Sect. con.).
R. Simson, Sectionum conicarum libri quinque, Edinburg 1735, 2. Ausg. 1750; zitiert ist die 2. Ausg. unter der Abkürzung (Sect. con.).
L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Bd. 2, Lausanne 1748 (besonders Kapitel 5 und 6).

2. Neuere Litteratur.

a) Lehrbücher.

J. V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822; 2. Ausg. 2 Bde. Paris 1865—1866 (Traité).
A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827; auch in Bd. 1 der Ges. Werke, Leipzig 1885 (Baryc. Calcul).
J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen, 3 Bde. Essen 1828—1831 (Anal. Entw.).
L. J. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833 (Aufg.).
J. Plücker, System der analytischen Geometrie, Berlin 1835 (System d. Geom.).
G. Salmon, A treatise on conic sections, Dublin 1848; 6. Aufl. London 1879.
C. Briot et *J. C. Bouquet,* Leçons de géométrie analytique, 2. Aufl. Paris 1851, 16. Aufl. 1897, revid. von *P. Appell.*
M. Chasles, Traité de géométrie supérieure, Paris 1852; 2. Aufl. 1880 (Géom. sup.).
Chr. Paulus, Grundlinien der neueren ebenen Geometrie, Stuttgart 1853.
W. Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, nach *G. Salmon* deutsch bearbeitet, Leipzig 1860; 3. Aufl. nach *G. Salmon* frei bearbeitet, Leipzig 1873; 5. Aufl. 2 Teile, Leipzig 1887—1888; 6. Aufl. 1. Teil 1898. Zitiert ist die 5. Aufl. unter der Abkürzung (*Salmon-Fiedler,* Kegelschn.).
N. M. Ferrers, An elementary treatise on trilinear coordinates, London 1861 (Tril. coord.).
O. Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene, 1. Aufl. Leipzig 1865; 3. Aufl. revid. von *S. Gundelfinger*, 1881.
M. Chasles, Traité des sections coniques, Paris 1865 (Sect. con.).
R. Rubini, Elementi die geometria analitica. Parte I, Geometria nel piano. Napoli 1865.
O. Hesse, Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie, Leipzig 1866 = Zeitsch. Math. Phys. 11, p. 369—425 (4 Vorl.).
Th. Reye, Die Geometrie der Lage, 1. Abt. Hannover 1866; 4. Aufl. Leipzig 1899 (Geom. d. Lage).
H. Pfaff, Neuere Geometrie, 2 Teile, Erlangen 1867.
J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 1. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearb. von *C. F. Geiser,* Leipzig 1867, 3. Aufl. 1887 (*Steiner-Geiser*); 2. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektive Eigenschaften, bearb. von *H. Schröter,* Leipzig 1867, 3. Aufl. durchgesehen von *R. Sturm* 1898 (*Steiner-Schröter*).
L. Cremona, Elementi di geometria proiettiva, Roma 1873, in's Deutsche übertragen von *Fr. R. Trautvetter,* Stuttgart 1882.
O. Hesse, Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig 1874 = Zeitsch. Math. Phys. 19, p. 1—52 (7 Vorl.).

H. Hankel, Vorlesungen über die Elemente der projektivischen Geometrie, Leipzig 1875.

S. A. Renshaw, The cone and its sections treated geometrically, London 1875.

A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearb. und herausg. von *F. Lindemann,* Bd. 1, Leipzig 1876 (Vorl.); in's Französ. übers. von *Ad. Benoist,* 3 Bde. Paris 1879—1883.

R. Baltzer, Analytische Geometrie, Leipzig 1882.

H. Picquet, Traité de géométrie analytique, 1. partie, Paris 1882.

T. H. Eagles, Constructive geometry of plane curves, London 1885.

J. Casey, A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle and conic sections, Dublin 1885, 2. Aufl. 1893.

K. Bobek, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene, Leipzig 1889, 2. Ausg. 1897.

S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausg. von *F. Dingeldey,* Leipzig 1895 (*Gundelfinger,* Vorl.).

E. d'Ovidio, Geometria analitica, Torino 1896.

F. Enriques, Lezioni di geometria proiettiva, Bologna 1898.

R. Böger, Ebene Geometrie der Lage, Leipzig 1900. Sammlung Schubert, VII.

W. Killing, Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. 1. Teil: Die ebene Geometrie. Paderborn 1900.

b) Sonstige Schriften.

L. N. M. Carnot, Géométrie de position, Paris 1803 (Géom. de pos.).

C. J. Brianchon, Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817.

G. Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818.

J. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1833, auch in Bd. 1 der ges. Werke und Nr. 82—83 von *Ostwald*'s Klass. (Syst. Entw.).

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, in den Mém. couron. par l'acad. de Bruxelles, Bd. 11, Brüssel 1837; 2. Ausg. Paris 1875; 3. Ausg. 1889. — Aus dem Französischen übertragen durch *L. A. Sohncke.* Halle 1839.

Chr. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847. — Beiträge zur Geometrie der Lage, 3 Hefte, Nürnberg 1856—1860.

J. V. Poncelet, Applications d'analyse et de géométrie, 2 Bde. Paris 1862—1864 (Appl. d'anal.).

P. Serret, Géométrie de direction, Paris 1869.

H. Picquet, Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques, Paris 1872 (Étude géom.).

H. G. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, deutsch von *Fischer-Benzon,* Kopenhagen 1886 (Kegelschn.).

E. Kötter, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie, Leipzig 1899—1901, in Bd. 5 der Jahresberichte der Deutschen Math.-Vereinigung (Bericht).

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Bd. 2. Aufl. Leipzig 1894; 2. Bd. 2. Aufl. Leipzig 1900; 3. Bd. Leipzig 1898, 2. Aufl. 1901 (Gesch. d. Math.).

Eingeklammerte Bezeichnungen bedeuten die bei häufiger wiederkehrenden Zitaten gewählten Abkürzungen.

I. Der Kegelschnitt als Einzelgebilde.

A. Elementare Erzeugungsweisen und Eigenschaften.

1. Schnitt von Kegel und Ebene. Wie der Name andeutet, werden die Kegelschnitte erzeugt durch Schnitt eines Kegels mit Ebenen, und zwar wurde ursprünglich die Schnittebene *rechtwinklig* zu einer Seitenlinie eines *geraden Kreiskegels* gelegt. Je nachdem der Winkel zwischen Axe und Seitenlinie dieses Kegels kleiner, gleich oder grösser als ein halber Rechter war, unterschied man Schnitte des spitzwinkligen, rechtwinkligen, stumpfwinkligen Kegels oder, wie wir heute sagen, Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln [1]). Die Erzeugung der Ellipse durch Ebenen, die alle Seitenlinien eines geraden Kreiskegels (im Sinne der elementaren Stereometrie, nicht Doppelkegels) oder Cylinders im Endlichen schneiden, im übrigen beliebig liegen, war bereits *Euklid* (um 300 v. Chr.) und *Archimedes* (287—212 v. Chr.) bekannt [2]), und es ist anzunehmen, dass die Art, wie man zu dieser Erkenntnis gelangt war, eine sofort ersichtliche Erweiterung für die Erzeugung von Parabel und Hyperbel zuliess. Jedenfalls hat aber erst *Apollonius* (um 225 v. Chr.) die Erzeugung der drei Kurven durch Schnitte schiefer Kegel von kreisförmiger Basis zum Ausgangspunkt geometrischer Untersuchungen genommen [3]). Auch erkannte *Apollonius* die Eigenschaften der Kegelschnitte, die durch ihre „Scheitelgleichungen“ ausgedrückt werden und Anlass zur Wahl der Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel gaben [4]).

---

1) Vielfach, von den Alten fast stets, wird *Menächmus* (um 350 v. Chr.), ein Schüler Platons, als Entdecker der Kegelschnitte bezeichnet. Mit Sicherheit dürfte die Richtigkeit dieser Angabe kaum mehr zu entscheiden sein; jedenfalls findet sich bei *Eratosthenes* (275—194 v. Chr.) für die drei Kegelschnitte der Name „Triaden des Menächmus“. Ein besonderes Werk über Kegelschnitte schrieb *Menächmus* vermutlich nicht; nach Angabe von *Pappus* (um 300 n. Chr.) hat vielmehr zuerst *Aristäus der Ältere* um 320 v. Chr. ein Werk über Kegelschnitte herausgegeben.

2) *Archimedes'* Schrift über Konoide und Sphäroide, in „Opera omnia“, ed. *J. L. Heiberg,* Bd. 1, Leipzig 1880, p. 288 = Deutsche Übersetzung von *E. Nizze,* Stralsund 1824, p. 154; *Euklides'* Phaenomena.

3) Werk über Kegelschnitte, Buch 1, § 11—14; Buch 6, § 28—33. Vgl. auch *H. G. Zeuthen,* Kegelschnitte, p. 39—42.

4) Es möge dies beim geraden Kreiskegel für den Fall der Ellipse näher erläutert werden. Eine durch die Kegelaxe gelegte Ebene δ bestimmt durch ihren Schnitt mit dem Kegel k und dessen Basis ein Axendreieck SKL (Fig. 1). Legt man nun durch k eine Ebene ε rechtwinklig zu δ, so sind die verschiedenen Arten der Schnittkurve durch den Winkel zwischen ε und der Seite des

2. Konstante Summe oder Differenz der Abstände von zwei festen Punkten. Auf andere Weise gelangt man zu Ellipse und

---

Axendreiecks bedingt. Die Ebene ε möge SK und SL im Endlichen treffen und die Schnittkurve ganz auf dem einen Kegelmantel liegen. Ist dann P irgend ein Punkt dieser Kurve, MPN der durch ihn gelegte Kreis des Kegels, so ist $RP^2 = MR \cdot RN$, $R'P'^2 = KR' \cdot R'L$ und $RP^2 : R'P'^2 = \frac{MR}{KR'} \cdot \frac{RN}{R'L} = \frac{A'R}{A'R'} \cdot \frac{RA}{R'A}$, somit $RP^2 : A'R \cdot RA = R'P'^2 : A'R' \cdot R'A$, also konstant, etwa gleich $\varkappa^2$. Denken wir uns in ε ein Koordinatensystem mit AA' als positiver x-Axe, einer durch A rechtwinklig zu AA' gezogenen Geraden als y-Axe, so ist $RA = x$, $PR = y$ und $y^2 : x = \varkappa^2 (A'A - x)$, und wenn man $A'A = 2a$, $\varkappa^2 \cdot A'A = p$ setzt, wird $y^2 = px - \frac{p}{2a} x^2$ die Gleichung der Schnittkurve, einer Ellipse. Schneidet die Ebene ε beide Mäntel des Kegels, so ist die Schnittkurve eine Hyperbel, ihre Gleichung wird $y^2 = px + \frac{p}{2a} x^2$; aus der Lage von ε erkennt man, dass diese Kurve aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden Ästen besteht und zwei unendlich ferne Punkte hat. Ist ε zu einer Seite des Axendreiecks SKL parallel, so ist die Schnittkurve eine Parabel, ihre Gleichung wird $y^2 = px$. Sie bildet den Übergang von Ellipse zu Hyperbel. Je nachdem der Fall der Ellipse oder Hyperbel vorliegt, müsste ein Rechteck, das mit y^2 inhaltsgleich sein soll und dessen eine Seite x ist, zur anstossenden Seite eine Strecke haben, die kleiner bezw. grösser als p ist; beim messenden Vergleichen dieser zweiten Seite mit p würde im Fall der Ellipse ein Stück von p *übrig gelassen werden,* während bei der Hyperbel diese zweite Seite *über p hinausreichen* würde. Im Fall der Parabel würde die zweite Seite des entsprechenden Rechtecks mit p übereinstimmen, das Rechteck genau an p *anliegen.* Nach den griechischen Worten *ἐλλείπειν* übrig lassen, *ὑπερβάλλειν* darüber hinausreichen, *παραβάλλειν* anlegen haben die drei Kegelschnitte ihre Namen erhalten. Vgl. *Apollonius,* Buch 1, § 11—14. Hier finden sich Sätze und Formeln, die dasselbe aussagen, wie die obigen drei Gleichungen. Später finden sich diese 1637 in *R. Descartes'* Géométrie (p. 30 und 43 der deutschen Übersetzung von *L. Schlesinger,* Berlin 1894; dann 1655 bei *J. Wallis,* „De sectionibus conicis" (in seinen Opera mathematica, 1, Oxoniae 1699, p. 310, 315, 318, sowie 321, 326, 336). Der Name Ellipse findet sich auch bei *Archimedes,* vermutlich aber nur als spätere Einschaltung der Herausgeber. Über die Behandlung der Kegelschnitte bei den alten griechischen Mathematikern vgl. z. B.

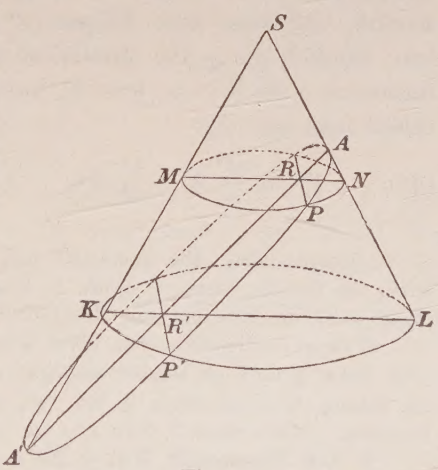

Fig. 1.

Hyperbel bei Beantwortung der Frage nach dem geometrischen Ort aller Punkte P, für die entweder (Fall α) die Summe oder (Fall β) die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F, den sogenannten *Brennpunkten*, konstant, etwa gleich $2a$ ist. Wählt man die Gerade F_1F als x-Axe, die Mitte O von F_1F als Koordinatenanfang eines rechtwinkligen Cartesischen Systems und ist $F_1F = 2c$, so hat man:

$$(1) \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2} \mp \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

wo $\mp$ den Fällen α bezw. β entspricht. Nach zweimaligem Quadrieren folgt für beide Fälle $x^2(a^2-c^2) + y^2a^2 - a^2(a^2-c^2) = 0$. Bei konstanter Summe $2a = PF_1 + PF$ muss nun notwendig $2a > 2c$, also $a^2 - c^2$ positiv, etwa $= b^2$, sein, bei konstanter Differenz ist $a < c$, man setzt $c^2 - a^2 = b^2$; die Gleichung des Ortes wird daher:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo $\mp$ den Fällen α bezw. β entspricht[5]). Die Kurve ist ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse (α) oder Hyperbel (β)[6]); verschiebt man nämlich die y-Axe parallel zu sich selbst bei α durch die Transformation $x = X - a$, $y = Y$, bei β durch $x = X + a$, $y = Y$, so erhält man aus (2):

$$(3^\alpha) \qquad Y^2 = \frac{2b^2}{a} X - \frac{b^2}{a^2} X^2, \qquad (3^\beta) \quad Y^2 = \frac{2b^2}{a} X + \frac{b^2}{a^2} X^2,$$

C. A. Bretschneider, „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides", Leipzig 1870; *M. Cantor,* Gesch. d. Math. 1; *Zeuthen,* Kegelschn. und „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter", Kopenhagen 1896.

5) In wesentlich derselben Form wohl zuerst im 17. Jahrh. bei *P. de Fermat,* „Ad locos planos et solidos isagoge" = Oeuvres publ. par *P. Tannery* et *Ch. Henry,* 1, Paris 1891, p. 99; vgl. auch *J. de Witt,* „Elementa curvarum linearum" (1659), Buch 2, Satz 12—14.

6) Die Eigenschaft $PF_1 \mp PF = 2a$ findet sich schon bei *Apollonius* (Buch 3, § 52 und 51). Auf sie gründet sich bei der Ellipse eine Fadenkonstruktion (Gärtnerkonstruktion). Wird nämlich ein mit seinen Enden in F_1 und F etwa durch Nadeln befestigter Faden von der Länge $2a$ durch den Zeichenstift gespannt erhalten, so beschreibt dieser eine Ellipse. Die älteste Nachricht über diese Erzeugung stammt aus dem 9. Jahrhundert, und zwar von *Alhasan,* dem jüngsten der sogenannten *drei Brüder* (*Mohammed, Hamed, Alhasan*), Söhne des *Musa Ibn Schakir.* Vgl. *Cantor,* Gesch. d. Math. 1, p. 690; *A. von Braunmühl* im Katalog math. Modelle, hrsg. von *W. v. Dyck,* München 1892, p. 59. Es ist aber wohl anzunehmen, dass diese Erzeugung noch älter ist. Besser benutzt man einen geschlossenen Faden von der Länge $2c + 2a$, den man um die Nadeln herumlegt und gespannt erhält. Eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion wird in Nr. 69 erwähnt.

somit genau die oben Fussn. 4 erwähnten Gleichungen, nur wäre noch $\frac{2b^2}{a}$ zu ersetzen durch p.

3. Diskussion der Gleichungen für Ellipse und Hyperbel. Beide Kurven sind, wie (2) zeigt, zu den Koordinatenaxen symmetrisch; jede durch O gelegte Sehne wird als Durchmesser der Kurve bezeichnet und hat in O ihre Mitte, O selbst heisst Mittelpunkt der Kurve. Die nach y aufgelöste Gleichung der *Ellipse*:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \tag{4}$$

zeigt, dass y nur für $-a \leqq x \leqq +a$ reelle Werte annimmt. Für $x = 0$ wird $y = \pm b$, die Verbindungslinie dieser beiden Punkte B, B_1 (Fig. 2) heisst die kleine Axe oder Nebenaxe; für $y = 0$ wird $x = \pm a$, die Verbindungslinie AA_1 der zugehörigen Punkte heisst die grosse Axe oder Hauptaxe der Ellipse. Die Endpunkte der Axen nennt man Scheitel [III D 1, 2, p. 30]. Die Halbierungslinie des Winkels F_1PF ist, wie leicht zu zeigen, eine Normale der Kurve, die Halbierungslinie des Nebenwinkels eine Tangente [III D 1, 2 Nr. 4]. Befindet sich in F oder F_1 eine Lichtquelle, so laufen alle von da ausgehenden und durch die Kurve reflektierten Strahlen in dem anderen der beiden Punkte zusammen. Auf Grund dieser optischen Eigenschaft werden F und F_1 die Brennpunkte[7]) der Ellipse genannt, die Geraden FP und F_1P Brennstrahlen. Der Abstand c eines der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkt ist die lineare, das Verhältnis $c : a$ die numerische Exzentrizität[8]). Die Grösse $p = \frac{2b^2}{a}$ $\left(\text{oft auch } p = \frac{b^2}{a}\right)$ nennt man Parameter[9]), ihre Hälfte Semiparameter; geometrisch ist p die Länge der Sehne,

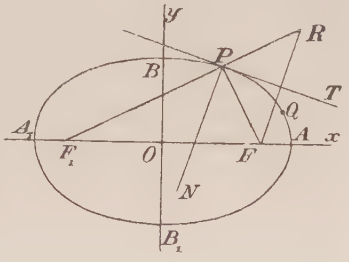

Fig. 2.

7) Der Name Focus (Brennpunkt) scheint zuerst bei *J. Kepler* aufzutreten („Ad Vitellionem Paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur", Frankfurt 1604, in den von *Ch. Frisch* herausgegebenen Opera omnia 2, Frankfurt u. Erlangen 1859, p. 186). Bei *G. Desargues,* Oeuvres 1, p. 210 heissen diese Punkte nombrils (umbilici), points brulans, foyers.

8) Nach *Kepler,* „Astronomia nova", 1609.

9) Bei lateinischen Autoren latus rectum. Das Wort Parameter findet sich schon 1639 bei *Desargues,* wahrscheinlich ist diese Bezeichnung noch etwas älter. *F. van Schooten* bemerkt nämlich p. 208 in seiner 1659 zu Frankfurt a. M. erschienenen Ausgabe von *Descartes'* Geometrie, *Cl. Mydorge,* der 1631 ein

die man durch F oder F_1 rechtwinklig zur Axe zieht. Die Form $x^2 + \frac{y^2}{b^2 : a^2} = a^2$ der Ellipsengleichung zeigt, dass die Kurve aus dem Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ konstruiert werden kann, indem man die Abscissen seiner Punkte unverändert lässt, die Ordinaten im Verhältnis $b : a$ verkleinert[10]; beide Kurven sind affin verwandt [III A 6]. Auch die Darstellung $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, wo t die exzentrische Anomalie[11]) ist, drückt im wesentlichen dasselbe aus. Auf sie gründet sich eine aus Fig. 3 ersichtliche Konstruktion von Punkten P der Ellipse mit Hülfe zweier konzentrischer Kreise von den Radien a und b.[12])

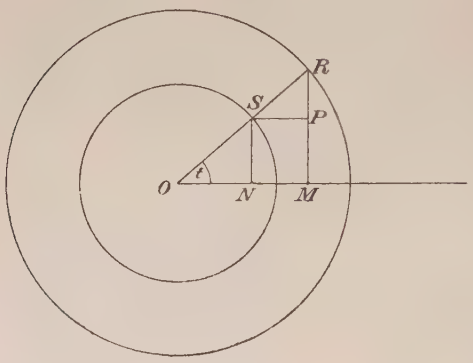

Fig. 3.

Die Gleichung der *Hyperbel*:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{5}$$

zeigt, dass $y = 0$ wird für $x = \pm a$; die zugehörigen Punkte heissen die Scheitel, ihre Verbindungslinie ist die Hauptaxe. Der zu ihr rechtwinklige Durchmesser (Nebenaxe) trifft die Kurve in imaginären Punkten, wie überhaupt y imaginär wird, sobald $|x| < a$. Wird $|x| > a$, so wächst auch y und wird schliesslich unendlich gross. Bei Einführung von Polarkoordinaten lautet die Kurvengleichung:

$$\varrho = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta}}, \tag{6}$$

Buch über Kegelschnitte herausgab, habe die Grösse p Parameter genannt. Allgemein ist bei Mittelpunktskegelschnitten der zu einem beliebigen Durchmesser $2a_1$ gehörige Parameter die Grösse, mit der $2a_1$ zu multiplizieren ist, um das Quadrat des konjugierten Durchmessers $2b_1$ (Nr. **11**) zu erhalten; bei der Parabel ist der einem beliebigen Durchmesser zugehörige Parameter gleich dem vierfachen Abstand der Direktrix (Nr. 4) vom Scheitel dieses Durchmessers.

10) Diese Thatsache war wohl schon *Archimedes* bekannt (Konoide und Sphäroide, Satz 5 = Opera omnia, ed. *J. L. Heiberg,* 1, Leipzig 1880, p. 308 = Deutsche Übersetzung von *E. Nizze,* Stralsund 1824, p. 160).

11) Bei *Kepler* anomalia eccentri („Astronomia nova", 1609, vgl. Bd. 3, p. 394 und 408 der schon zitierten [7]) Ausgabe von *Frisch,* sowie in den Anmerkungen des Herausgebers ebenda den Schluss von p. 503.

12) *Ph. De la Hire,* Sect. con. Buch 9, prop. 4, p. 199.

und man erkennt, dass reelle Radienvektoren nur vorhanden sind, so lange $\operatorname{tg}^2\vartheta \leqq \frac{b^2}{a^2}$; für $\operatorname{tg}\vartheta = \pm\frac{b}{a}$ wird $\varrho = \infty$; die entsprechenden zu den Axen symmetrischen Geraden, denen sich die Kurve unbegrenzt nähert, treffen die Kurve in je zwei zusammenfallenden Punkten im Unendlichen und heissen *Asymptoten* [III D 1,2 Nr. 8] der Hyperbel[13]) (Fig. 4). Die Punkte F und F_1 heissen wieder Brennpunkte, und die von F oder F_1 ausgehenden Lichtstrahlen zeigen ein ähnliches optisches Verhalten wie bei der Ellipse. Parameter, lineare und numerische Exzentrizität sind bei Hyperbel und Ellipse in gleicher Weise definiert, doch ist jetzt $c^2 = a^2 + b^2$. Werden die Asymptoten als (im allgemeinen schiefwinklige) Koordinatenaxen zu Grunde gelegt, so wird die Gleichung der Kurve[14]):

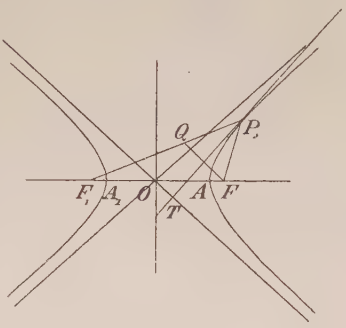

Fig. 4.

$$(7) \qquad x\,y = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Aus ihr folgt, dass, wenn man durch irgend einen Punkt der Hyperbel Parallelen zu den Asymptoten zieht, das so entstehende Parallelogramm konstanten Inhalt hat[15]).

Im Falle $a = b$ wird $\operatorname{tg}\vartheta = \pm 1$, der Winkel, den die Asymptoten einschliessen, ist dann ein Rechter, die Kurve heisst *gleichseitige* oder *rechtwinklige* Hyperbel[16]).

Eine Konstruktion beliebig vieler Punkte der durch a und b gegebenen Hyperbel gründet sich auf die Darstellung[17]) $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \operatorname{tg} t$.

13) So schon bei *Apollonius* Buch 2, § 1.

14) In wesentlich derselben Form wohl zuerst bei *P. de Fermat*, „Ad locos planos et solidos isagoge" = Oeuvres publ. par Tannery et Henry 1, p. 93 f.; vgl. auch *J. de Witt*, „Elementa curvarum linearum" (1659) Buch 2, Satz 11.

15) Dies war wohl schon *Menächmus* bekannt (*Cantor*, Gesch. d. Math. 1, p. 218); bei *Apollonius*[56]) findet sich ein noch allgemeinerer Satz.

16) Der Ausdruck rührt wohl daher, dass für diese Kurve die beiden latera, nämlich latus rectum $p = \frac{2b^2}{a}$ und Hauptaxe (latus transversum $2a$) einander gleich sind; überhaupt sind hier alle Kurvendurchmesser den ihnen zugehörigen Parametern gleich. Vgl. *Apollonius* Buch 7, § 23 und *De la Hire*, „Les lieux géométriques", Paris 1679, p. 218; sect. con. p. 95.

17) *E. R. Turner*, Cambr. Dubl. m. J. 1 (1846), p. 123, wo auch geometrische Deutung der Darstellung. Ohne solche Deutung schon bei *A. M. Legendre*, Par. Hist. acad. 1786 (gedruckt 1788), p. 617 und 634.

4. Definition der Kegelschnitte durch Brennpunkt und Leitlinie. Diskussion der Parabel. Eine andere schon den Alten bekannte Erzeugung der Kegelschnitte fasst diese Kurven als Orte von Punkten auf, für die das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt F (Brennpunkt) und einer festen Geraden g (Leitlinie, Direktrix) konstant, etwa gleich λ ist. Je nachdem $\lambda <, =, > 1$, ist der Ort eine Ellipse, Parabel, Hyperbel[18]). Aus Symmetriegründen giebt es 2 Punkte F, zu deren jedem eine Direktrix gehört. Man erkennt leicht, dass die Direktrix zur Hauptaxe rechtwinklig und dass λ die numerische Exzentrizität ist. Bezeichnet d die Entfernung der Direktrix vom Mittelpunkt der Kurve, so besteht, wie man leicht findet, die Beziehung $cd = a^2$, und da bei der Ellipse $a > c$, bei der Hyperbel $a < c$, so ist dementsprechend auch $d > a$ oder $d < a$. Die Parabel kann als eine Ellipse oder Hyperbel betrachtet werden, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt; für sie sind a, c, d unendlich gross. Der Scheitel S der Parabel (Fig. 5) liegt auf der Axe in der Mitte zwischen F und dem Schnittpunkt G der Axe mit g; dabei ist $4SF = p$, unter p den Parameter der Kurve verstanden. Bei Ellipse und Hyperbel giebt es zu jedem Brennpunkt eine Direktrix, bei der Parabel liegt der zweite Brennpunkt auf der Axe im Unendlichen, seine Direktrix fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen, die überdies die Kurve berührt.

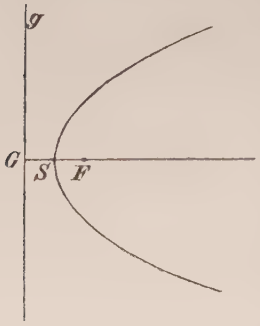

Fig. 5.

5. Sätze von Dupin und Dandelin. Eine Konstruktion für die Spitzen der geraden Kreiskegel, auf denen ein gegebener Kegelschnitt k liegt, hat schon *Apollonius*[19]) gegeben. Erst *Ch. Dupin* bemerkte, dass der Ort dieser Spitzen ein Kegelschnitt k_1 ist, der die Brennpunkte von k zu Scheiteln, die Scheitel der Hauptaxe zu Brennpunkten hat und dass die Ebenen von k und k_1 zueinander rechtwinklig sind, überhaupt das Verhalten beider Kurven ein gegenseitiges

18) Diese Erzeugungsweise kannte wahrscheinlich schon *Euklid* (vgl. *Zeuthen,* Kegelschn., p. 367 f.); wirklich erwähnt wird sie von *Pappus*, Collectio Buch 7, prop. 235 und 238, ed. *F. Hultsch* 2, Berlin 1877, p. 1004—1007, 1012—1015. Vgl. auch Nr. **30**. Bei *Apollonius* findet sich kein Satz über den Brennpunkt der Parabel, doch war ihm jedenfalls obige Erzeugungsweise bekannt. Eine als Direktrix bezeichnete Gerade findet sich mit ganz anderer geom. Bedeutung bei *De la Hire,* Sect. con. p. 15; in der heute üblichen Deutung gebraucht *De l'Hospital,* Sect. con., p. 2 das Wort bei der Parabel.

19) Buch 1, § 52—54.

ist[20]). Die Bestimmung der Brennpunkte der aus einem geraden Kegel durch eine Ebene ε ausgeschnittenen Kurve k erfolgt durch einen Satz von *G. P. Dandelin*[21]). Die Schnittebene ε wird nämlich von zwei der unendlich vielen dem Kegel eingeschriebenen Kugeln berührt, die Berührungspunkte sind die Brennpunkte von k. Die Schnittgeraden von ε mit den Ebenen der zwei Kreise, längs deren die Kugeln den Kegel berühren, sind die Leitlinien von k. *Jakob I Bernoulli*[22]) gab eine sehr einfache Konstruktion für die Länge des Parameters.

Es sei noch erwähnt, dass *S. A. Renshaw*[22a]) die wichtigsten Sätze über ebene Schnitte eines schiefwinkligen Kegels von kreisförmiger Basis mit Hülfe einfacher Sätze der Elementargeometrie abgeleitet hat.

B. Allgemeine Theorie der Kegelschnitte.

6. Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel oder Punktreihen. Die neuere synthetische Geometrie betrachtet den Kegelschnitt seit *J. Steiner* und *M. Chasles* in erster Linie als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlenbüschel bezw. als Hüllkurve der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen (III A 5). Den Nachweis, dass sich ein und derselbe nicht zerfallende Kegelschnitt auf beide Arten erzeugen lässt, führt *Steiner* ursprünglich, indem er mit Hülfe elementarer Sätze diese Erzeugungsweise für den Kreis beweist; durch Projektion überträgt er sie alsdann auf den Kegelschnitt[23]). *Chasles* zeigt[24]), dass

20) *J. N. P. Hachette* giebt bereits 1804 (Corr. de l'éc. pol. 1, p. 22—25) *Dupin* als Entdecker des Satzes an. Vgl. noch *Dupin,* Corr. de l'éc. polyt. 2 (1813), p. 424; *A. Quetelet,* Bruxelles nouv. mém. 2 (1820), p. 151; *J. Steiner*, J. f. Math. 1 (1825), p. 47 f. = Werke 1, p. 11; *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 12 (1834), p. 138 = Werke 7, p. 8.

21) Bruxelles nouv. mém. 2 (1822), p. 172 f. Die Konstruktion der Brennpunkte eines ebenen Schnittes beim schiefen Kegel gab *J. Walker*, Cambr. Dubl. m. J. 7 (1851), p. 19. *Dandelin* erweiterte den Satz auch für die Schnitte des einschaligen Rotationshyperboloids, Ann. de math. 15 (1825), p. 390 f.; Bruxelles nouv. mém. 3 (1826), p. 3—8, und *M. Chasles* für die Schnitte beliebiger Rotationsflächen 2. Ordnung (Ann. de math. 19 (1828), p. 167, noch allgemeiner im „Rapport sur les progrès de la géom.", Par. 1870, p. 74). Näheres über den Gegenstand bei *E. Kötter*, Bericht, p. 57—64.

22) Acta Erud., Leipzig 1689, p. 586 f.

22a) „The cone and its sections treated geometrically", London 1875.

23) Syst. Entw. § 37—38 = Werke 1, p. 329—333 = Ostwald's Klass. Nr. 83, *Steiner-Schröter,* Vorl. § 20—26. Übrigens findet sich eigentlich schon bei *Apollonius*, Buch 3, § 54—56 eine Erzeugung durch projektive Strahlenbüschel, und auch *De l'Hospital,* Sect. con. Nr. 163 konstruiert Punkte eines Kegelschnitts

man bei jeder von beiden Erzeugungsweisen ein Gebilde erhält, das die Projektion eines Kreises ist, und zwar führt er diesen Beweis mit Hülfe eines Satzes von *J. V. Poncelet*[25]), demzufolge ein Kegelschnitt k und eine ihn nicht schneidende Gerade seiner Ebene stets so projiziert werden können, dass die Gerade ins Unendliche fällt und k ein Kreis wird.

In seinen Vorlesungen hat *Steiner* die Identität des Erzeugnisses zweier projektiver Punktreihen resp. Strahlenbüschel mit Hülfe des Satzes bewiesen, dass die auf einer beliebig aber fest gewählten Tangente t des Kegelschnitts k durch beliebige andere Tangenten ausgeschnittene Punktreihe projektiv ist zu dem Strahlenbüschel, das den Berührungspunkt von t mit den Berührungspunkten der anderen Tangenten verbindet[26]).

Der Kegelschnitt k wird von jeder Geraden g der Ebene in zwei reellen oder imaginären Punkten getroffen, denn die erzeugenden projektiven Büschel b, b_1 schneiden auf g zwei projektive Punktreihen aus, und diese besitzen zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte (III A 5), in denen sich entsprechende Strahlen beider Büschel schneiden; k ist daher von der zweiten Ordnung[27]). Die Mittelpunkte S, S_1 von b und b_1 gehören dem Orte k an, sind aber keineswegs ausgezeichnete Punkte von k, vielmehr kann man irgend zwei Schnittpunkte entsprechender Strahlen von b und b_1 als Mittelpunkte erzeugender Büschel wählen. Werden daher irgend zwei Punkte auf k mit allen übrigen durch Strahlenpaare verbunden, so entstehen zwei projektive Büschel, deren entsprechende Elemente sich auf k schneiden, oder

---

als Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier spezieller Büschel (spätestens 1704 gefunden). Bezüglich *Apollonius* vgl. noch *Zeuthen*, Kegelschn., p. 123 ff.

24) Géom. sup., p. 396 und 400 f. Vgl. ferner *E. Dewulf*, Giorn. di mat. 13 (1875), p. 168 f. Übrigens hat *Chasles* schon 1829 (Corresp. math. publ. par *A. Quetelet* 5, p. 294) die folgenden 2 Sätze bewiesen: Der Ort aller Punkte, deren Verbindungslinien mit 4 festen Punkten jedesmal eine harmonische Strahlengruppe bilden, ist ein Kegelschnitt, der durch die 4 festen Punkte geht, und: Eine bewegliche Gerade, die 4 feste Geraden stets in einer harmonischen Punktgruppe trifft, umhüllt einen die festen Geraden berührenden Kegelschnitt. Vgl. auch *Chr. v. Staudt*, „Über die Kurven 2. Ordnung", Progr. Nürnberg 1831, p. 11. 25) Traité, Nr. 109 f.

26) Für den analytischen Nachweis der projektiven Erzeugung sei auf *O. Hesse*, 4 Vorl., p. 15 f. und 29 = Zeitsch. Math. Phys. 11, p. 383 f. und 397 verwiesen.

27) Der Ausdruck Kurve $n$ter Ordnung für eine ebene Kurve, die von irgend einer Geraden in n Punkten getroffen wird, rührt von *J. Newton* her, „Enumeratio linearum tertii ordinis", 1. Cap. (1706) = Opera hrsgg. von *S. Horsley*, 1, London 1729, p. 531.

anders ausgedrückt: Werden vier beliebig aber fest gewählte Punkte von k mit einem beliebigen fünften Punkte der Kurve verbunden, so ist das Doppelverhältnis δ dieser vier Strahlen konstant[28]); δ heisst auch das Doppelverhältnis jener vier Punkte. Man erkennt überdies, dass k im allgemeinen durch fünf Punkte bestimmt ist[29]); zwei derselben lassen sich als Mittelpunkte von b, b_1 wählen, die drei anderen als Schnittpunkte entsprechender Strahlen; durch die so erhaltenen drei Strahlenpaare ist die projektive Beziehung festgelegt.

Dual folgt, dass sich von jedem Punkt der Ebene an die Kurve k zwei reelle oder imaginäre Tangenten legen lassen, k ist von der zweiten Klasse[30]). Die Träger der zwei die Kurve erzeugenden projektiven Punktreihen sind Tangenten von k, aber keineswegs besonders ausgezeichnete. Durch die Schnittpunkte irgend zweier Tangenten t, t_1 von k mit allen übrigen werden auf t und t_1 zwei projektive Punktreihen gebildet, und die Verbindungslinien entsprechender Elemente sind Tangenten von k, oder anders ausgedrückt: Die Schnittpunkte von vier beliebig aber fest gewählten Tangenten der Kurve k mit einer beliebigen fünften Tangente haben konstantes Doppelverhältnis[31]), das auch als Doppelverhältnis der vier Tangenten bezeichnet wird. Durch fünf solche Geraden ist der Kegelschnitt im allgemeinen bestimmt[32]).

Es kann hier nicht näher gezeigt werden, wie Art und Gestalt des Kegelschnitts von der Lage und Beschaffenheit der erzeugenden Strahlenbüschel oder Punktreihen abhängen; wir verweisen vielmehr auf *Steiner*[33]).

28) *Steiner,* Syst. Entw. § 43.

29) Schon *Apollonius* scheint gewusst zu haben, dass ein Kegelschnitt im allgemeinen durch 5 Punkte bestimmt ist; vgl. *Zeuthen,* Kegelschn. 9. Abschnitt.

30) Der Ausdruck Kurve $n$ter Klasse für eine ebene Kurve, an die sich von irgend einem Punkte n Tangenten ziehen lassen, rührt von *J. D. Gergonne,* Ann. de math. 18 (1827), p. 151. Vermöge des Prinzipes der *Dualität* (Korrelation) entspricht jedem Satz, jeder Figur ein duales (korrelatives) Gegenbild. Im wesentlichen findet sich dieses Gesetz schon bei *Poncelet*[101]) in seiner Theorie der reziproken Polaren (vgl. Nr. 19 dieses Referats); *Gergonne,* Ann. de math. 16 (1826), p. 209—231 hat dasselbe in seiner ganzen Allgemeinheit ausgesprochen und als besonderes Prinzip aufgestellt. *J. Plücker* gab ihm durch Einführung der Linienkoordinaten algebraischen Ausdruck. Näheres bei *Kötter,* Bericht, p. 160—169. Vgl. auch III A 5; 6; III B 2.

31) *Steiner,* Syst. Entw. § 43; *Steiner-Schröter,* p. 90; *Hesse,* 4 Vorl., p. 29 = Zeitsch. Math. Phys. 11 (1866), p. 397.

32) Diese Thatsache war schon *B. Pascal* 1654 bekannt. Vgl. *Cantor,* Gesch. d. Math. 2, p. 680f.

33) Syst. Entw. § 36 und 40; *Steiner-Schröter,* § 24—26. Gewisse spezielle Fälle bei *A. Hirst,* Lond. math. soc. Proc. 2 (1869), p. 166—173. Besonders hervor-

7. Gleichung der C_2 in Punktkoordinaten. Bezogen auf irgend ein Koordinatendreieck mit beliebiger Lage des Einheitspunktes[34]) (III B 2) ist

$$(8) \qquad f(x,x) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

die allgemeine Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung C_2; wir setzen hierbei die a_{ik} stets als reell voraus. Gemäss der Bestimmung der C_2 durch fünf ihrer Punkte enthält (8) fünf von einander *unabhängige* Koeffizienten[35]). Die Gleichung einer durch 5 gegebene Punkte a, b, c, d, e gehenden C_2 ergiebt sich als eine gleich Null gesetzte Determinante 6. Grades[36]) Δ, kann aber auch durch

gehoben sei noch, dass sich im Falle der Parabel die unendlich fernen Punkte der beiden Reihen entsprechen, die Reihen also ähnlich (III A 5) sein müssen; es werden daher irgend zwei Tangenten der Kurve von allen übrigen in ähnlichen Punktreihen getroffen, wie übrigens schon *Apollonius* (Buch 3, § 41) bekannt war. Vgl. auch *De la Hire,* Par. Mém. année 1702, p. 100—103, Paris 1720; *M. R. de Prony,* J. éc. polyt. cah. 10 (1810), p. 57 f. Da ferner bei zwei projektiven Punktreihen das Produkt der Abstände eines Paares entsprechender Punkte von den beiden Fluchtpunkten konstant ist, folgt, dass jede Hyperbeltangente mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalt einschliesst, wie man gleichfalls bei *Apollonius,* Buch 3, § 43 findet.

34) Eine auf solche allgemeinste projektive Dreieckskoordinaten gegründete Theorie der Kegelschnitte hat *S. Gundelfinger* (Vorl.) gegeben. — Dass (8) den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene darstellt, ist bei analytischer Ableitung der in Nr. **6** gegebenen Resultate leicht einzusehen; für den Nachweis derselben Thatsache in der Nicht-*Euklidischen* Geometrie vgl. *J. Stringham,* London math. soc. Proc. 32 (1900), p. 308—311.

35) Schon bei *De l'Hospital,* Sect. con. Buch 7 haben die Koeffizienten der Glieder xy, x, y in der Gl. einer auf Parallelkoordinaten x, y bezogenen C_2 meist den Faktor 2, und *A. J. Hermann* (Comm. acad. Petrop. 4, p. 15—25 (1729, gedruckt 1735)) diskutiert die Gl. $\alpha y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\varepsilon x + \varphi = 0$. Die von *Hesse,* J. f. Math. 28 (1844), p. 75 = Werke, p. 96 f. stammende Bezeichnung der Koeffizienten durch a_{ik} wurde später besonders von *S. Aronhold* verwertet. Da die allgemeine Gleichung der C_2 fünf von einander unabhängige Konstanten enthält, genügen alle C_2 der Ebene einer Differentialgleichung 5. Ordnung, die wohl *G. Monge* (Corresp. éc. polyt. 2 (1810), p. 51 f.) zuerst aufgestellt hat. Dieselbe lautet $9y''^2 \cdot y^{(V)} - 45y'y''y^{(IV)} + 40y'''^3 = 0$. *G. H. Halphen* (Par. soc. math. Bull. 7 (1879), p. 83 ff.) zeigte, wie man diese Gleichung sehr rasch bilden kann und fügte Bemerkungen über ihre Integration hinzu.

36) *Hesse,* 7 Vorl., p. 2 f. = Zeitschr. Math. Phys. 19, p. 2 f. Schon *Bobillier,* Ann. de math. 18 (1828), p. 360 schrieb die Gl. einer durch die Schnittpunkte (A, B), (A', B), (A', B'), (B', A) von 4 Geraden A, A', B, B' gehenden C_2 in der Form $aA \cdot A' + bB \cdot B' = 0$. Ausgedrückt durch ein *Grassmann*'sches planimetrisches Produkt [III B 3] würde die Gleichung des Kegelschnitts (9) lauten $(xa \cdot bc)\ (xd \cdot ce)\ (db \cdot ae) = 0$ („Die lineale Ausdehnungslehre", Leipzig 1844, § 147 = Werke 1, p. 248).

$$(9) \qquad (ade)(bce)(abx)(cdx) - (abe)(cde)(adx)(bcx) = 0$$

dargestellt werden. Hierbei ist z. B. $(ade) = \sum \pm (a_1 d_2 e_3)$, wo a_1, a_2, a_3 die Koordinaten des Punktes a bedeuten. Es giebt offenbar 15 solche Darstellungen; ihren Zusammenhang unter sich und mit anderen Gleichungen der C_2 hat *E. Hunyady* genauer untersucht[37]).

8. Schnittpunkte einer Geraden mit der C_2. Pol und Polare. Zur Bestimmung der Schnittpunkte von (8) mit der Verbindungslinie zweier Punkte $x_1 : x_2 : x_3$ und $y_1 : y_2 : y_3$ setzt *F. Joachimsthal*[38]) die Koordinaten $y_i + \lambda x_i$ irgend eines Punktes dieser Geraden in (8) ein und erhält so:

$$(10) \qquad f(y,y) + 2\lambda f(y,x) + \lambda^2 f(x,x) = 0, \qquad \text{wobei:}$$

$$(11) \quad f(x,y) = f(y,x) = \sum_1^3 \frac{1}{2} f'(y_i)\, x_i = \sum_1^3 \frac{1}{2} f'(x_i)\, y_i \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Bei Einführung des Doppelverhältnisses α des Punktepaares x, y zu dem Schnittpunktepaar, das (10) entsprechend den zwei Wurzeln λ liefert, verwandelt sich (10) in[39]):

$$(12) \quad (\alpha+1)^2\{f^2(x,y) - f(x,x)\cdot f(y,y)\} - (\alpha-1)^2 f^2(x,y) = 0,$$

eine Gleichung, die bei festem Punkte y eine C_2 darstellt, den Ort aller Punkte x, deren Verbindungslinien mit y die gegebene C_2 (8) in einem Punktepaar schneiden, das mit x und y ein vorgelegtes Doppelverhältnis α bildet. Für den Fall eines harmonischen Verhältnisses ($\alpha = -1$) erhält man doppelt zählend:

37) J. f. Math. 83 (1876), p. 79—85. Vgl. auch Fussnote 102, sowie *M. Reiss*, Math. Ann. 2 (1867), p. 396—408; *Scholtz*, Arch. Math. Phys. 62 (1868), p. 317—324; *F. Caspary*, J. f. Math. 92 (1880), p. 130—135; *Hunyady* ebenda (1881), p. 307—310; *E. Müller*, J. f. Math. 115 (1894), p. 234—247; *P. Gordan*, Deutsche M.-V. 4 (1895), p. 155—157; *E. Study*, Leipz. Ber. 47 (1895), p. 542. Auch *M. Pasch* zeigte, wie sich $\Delta = 0$ in (9) überführen lässt und wies das identische Verschwinden von Δ nach, wenn vier der Punkte auf einer Geraden liegen (J. f. Math. 89 (1879), p. 247 f.); in andrer Art hat *Hesse* diesen Nachweis geführt. Geometrisch gedeutet liefert (9) den als Theorema ad quattuor lineas bekannten Satz von *Pappus* (Ausg. von Hultsch, 2, p. 678): Wird einem Kegelschnitt ein Viereck eingeschrieben, so steht das Produkt der von einem Kurvenpunkt P auf zwei Gegenseiten gefällten Lote in konstantem Verhältnis zu dem Produkt der von P auf die anderen Gegenseiten gefällten Lote. Wahrscheinlich war der Satz schon *Apollonius* bekannt (vgl. *Chasles*, J. de math. 3 (1838), p. 103 f.). Allgemeiner bei *Descartes*, Géométrie (1637) (deutsche Ausg. von *L. Schlesinger*, Berlin 1894, p. 8—17) und *Newton*, Princ. math. phil. nat. Buch 1, Satz 17—18. Vgl. auch *Chasles*, Corresp. math. 5 (1829), p. 289.

38) J. f. Math. 33 (1846), p. 373 (allgemein für C_n, „*Joachimsthal*'sche Methode").

39) *Clebsch*, Vorl. 1, p. 74 f.; *Gundelfinger* in seiner Ausgabe von *Hesse*'s Vorlesungen über analyt. Geom. des Raumes, 3. Aufl., p. 472 f. (1876).

(13) $$f(y,x) \equiv (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)x_2 + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)x_3 = 0,$$

eine Gerade, die auch durch die Berührungspunkte des von y an (8) gezogenen und ($\alpha = 1$) durch

(14) $$f^2(x,y) - f(x,x)\cdot f(y,y) = 0$$

dargestellten Tangentenpaares geht. Diese Gerade heisst nach *J. D. Gergonne*[40]) die Polare des Punktes y in Bezug auf (8), während y nach *J. F. Servois*[41]) der Pol der Geraden (13) heisst. Zwei Punkte y und x, die (13) genügen, von denen also jeder auf der Polare des anderen liegt, heissen nach *O. Hesse* konjugierte Punkte, nach *Steiner* harmonische Pole[42]) von (8); ebenso heissen zwei Geraden, deren jede durch den Pol der anderen geht, konjugierte Geraden oder harmonische Polaren. Liegt y auf der Kurve, so wird die Polare zur Tangente dieses Punktes.

Die Gleichung der Schnittpunkte von (8) mit einer Geraden $u_x \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ ergiebt sich nach *G. Salmon*[43]) in veränderlichen Linienkoordinaten v_i in der Gestalt $\begin{pmatrix} u\,v \\ u\,v \end{pmatrix}_{a\,i\,k} = 0$, wo allgemein $\begin{pmatrix} u\,v\,w\,\ldots \\ \xi\,\eta\,\zeta\,\ldots \end{pmatrix}_{a_{ik}}$ bedeutet[44]), dass die Determinante $A = \sum \pm (a_{11}\,a_{22}\,a_{33})$ auf einer Seite mit den $u_i, v_i, \ldots$, auf der anstossenden Seite mit den $\xi_i, \eta_i, \ldots$ zu rändern ist. Eine andere Methode zur Bestimmung der Schnittpunkte rührt von *S. Aronhold*[45]). Er findet für ihre Koordinaten x_i die Gleichungen:

40) Ann. de math. 3 (1813), p. 297. Der Satz, dass die oben genannten vierten harmonischen Punkte eine Gerade erfüllen, findet sich, nur in etwas andrer Form, schon bei *Apollonius,* Buch 3, § 37 und 39, dann bei *G. Desargues,* wo y auch so liegen darf, dass die zwei von y gezogenen Tangenten imaginär sind („Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan", Paris 1639 = Oeuvres, réun. et anal. par *Poudra,* 1, p. 164 und p. 186—189). 41) Ann. de math. 1 (1811), p. 337.

42) *Hesse,* J. f. Math. 20 (1840), p. 291 = Werke, p. 30; *Steiner,* Syst. Entw. Nr. 44 = Werke 1, p. 350. Bei *Poncelet,* Traité Nr. 82 und Nr. 370 points réciproques.

43) „Lessons introductory to the modern higher algebra", 3. ed. Dublin 1876, p. 17; 4. ed. Dublin 1885, p. 17. Deutsche Bearbeitung von *W. Fiedler,* 2. Aufl. Leipzig 1877, p. 23.

44) Bezeichnung nach *Clebsch,* J. f. Math. 58 (1860), p. 99. Die zwei in den v_i linearen Faktoren von $\begin{pmatrix} u\,v \\ u\,v \end{pmatrix}_{a_{ik}}$ hat *Gundelfinger* einzeln durch Ausdrücke dargestellt, die 3 willkürliche Grössen enthalten (Ann. di mat. (2) 5, p. 225 (1872)).

45) J. f. Math. 61 (1862), p. 103 f. Die speziellen Fälle werden näher erörtert bei *Gundelfinger,* Vorl., p. 36 ff. Eine 3 willkürliche Grössen enthaltende Auflösung von (15) gab *W. Spottiswoode,* wie *A. Cayley,* Lond. Trans. 152 (1862), p. 661 f. = Coll. papers 4, p. 419 mitteilt.

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{c} \varrho x_1 = f_2 u_3 - f_3 u_2, \quad \varrho x_2 = f_3 u_1 - f_1 u_3, \quad \varrho x_3 = f_1 u_2 - f_2 u_1, \\ \text{wo} \quad f_i = \frac{1}{2} f'(x_i), \quad \varrho = \pm \sqrt{\binom{u}{u}_{a_{ik}}}. \end{array} \right.$$

Das Verschwinden von ϱ drückt hierbei aus, dass die Gerade die Kurve berührt, d. h.:

$$(16)\quad \binom{u}{u}_{a_{ik}} \equiv -F(u,u) \equiv -\sum_1^3{}_i \sum_1^3{}_k A_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (A_{ik} = A_{ki})$$

ist die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten[46]); dabei bedeutet A_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik} in A. In Übereinstimmung mit (14) ist $F(u,u) \equiv f(x,x) \cdot f(y,y) - f^2(x,y)$, wenn man $u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $u_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$, $u_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$ setzt[47]).

9. Gleichung der Kurve 2. Klasse C^2. Ausgehend von der Gleichung eines Kegelschnitts in Linienkoordinaten:

$$(17)\quad \varphi(u,u) \equiv \alpha_{11} u_1^2 + 2\alpha_{12} u_1 u_2 + \alpha_{22} u_2^2 + 2\alpha_{13} u_1 u_3 + 2\alpha_{23} u_2 u_3 + \alpha_{33} u_3^2 = 0$$

lassen sich die zu den vorhergehenden dualen Betrachtungen anstellen. So hat z. B. der Pol einer Geraden $v_x = 0$ in Bezug auf (17) die Gleichung:

$$(18)\quad \varphi(u,v) \equiv \frac{1}{2}\varphi'(v_1) u_1 + \frac{1}{2}\varphi'(v_2) u_2 + \frac{1}{2}\varphi'(v_3) u_3 = 0.$$

In Punktkoordinaten wird (17) dargestellt durch:

$$(19)\quad \Phi(x,x) \equiv \sum_1^3{}_i \sum_1^3{}_k \mathsf{A}_{ik} x_i x_k = 0,$$

wo A_{ik} die Unterdeterminante von α_{ik} in $\mathsf{A} \equiv \sum \pm (\alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33})$ bedeutet.

10. Weitere Sätze über Pol und Polare. Polarsystem. Poldreieck. *Ph. de la Hire* zeigte, dass die Polare von P ein Strahlenbüschel beschreibt, wenn P eine Punktreihe durchläuft, und umgekehrt[48]). Ferner folgt, dass, wenn man in den Ecken eines dem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks $\mathfrak{V}$ die Tangenten zieht, die zwei Schnittpunkte der Gegenseiten von $\mathfrak{V}$ und die zwei Schnittpunkte

46) *Gergonne*, Ann. de math. 11 (1821), p. 380 f. giebt bei Parallelkoordinaten die Bedingung für die Berührung einer Geraden und einer C_2. Vgl. ferner *J. Plücker*, Anal. Entw. 1, p. 159 f.; *Cayley*, Lond. Trans. 146 (1856), p. 639 = Coll. papers 2, p. 323; Lond. Trans. 149 (1858), p. 76 = Coll. papers 2, p. 577.

47) *Cayley*, Lond. Trans. 152 (1862), p. 642 = Coll. papers 4, p. 398.

48) Sect. con. Buch 1, § 26—28; Buch 2, § 23—27. Die Projektivität der obigen Punktreihe und des Strahlenbüschels wird durch einen allgemeineren Satz von *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul § 290 = Werke 1, p. 380 über das Entsprechen von Punkten und Geraden gegeben.

der Gegenseiten des Tangentenvierecks $\mathfrak{W}$ auf der Polare des Diagonalenschnittpunktes von $\mathfrak{V}$ liegen. In ähnlicher Form findet man diesen Satz bei *R. Simson, C. Maclaurin* und *L. N. M. Carnot*[49]; auch gehen nach *Carnot* die Diagonalenpaare von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ durch einen und denselben Punkt, wobei nach *Ch. Sturm* das eine Paar zu dem anderen harmonisch liegt[50].

Alle Paare konjugierter Pole, die einer und derselben Geraden angehören, bilden eine Involution, deren Doppelpunkte aus den Schnittpunkten der C_2 mit der Geraden bestehen (III A 5). Analog bilden die einem Strahlenbüschel angehörigen Paare konjugierter Polaren eine Involution mit den im Büschel befindlichen Tangenten der C_2 als Doppelstrahlen[51].

Die Gesamtheit der durch einen Kegelschnitt k im Verhältnis von Pol und Polare einander zugeordneten Punkte und Geraden bezeichnet man nach *Chr. v. Staudt* als *Polarsystem.* Die Punkte, die auf ihren zugehörigen Polaren liegen, erfüllen die Kurve k, die *Ordnungskurve* des Polarsystems[52]. Das Polarsystem ist bestimmt, wenn man zwei konjugierte Polaren von k kennt und die Involutionen konjugierter Pole auf diesen bestimmt sind.

Drei Punkte der Ebene, deren jeder den zwei anderen konjugiert ist, bestimmen ein *Poldreieck* (Poldreiseit); seine Seiten sind paarweise konjugierte Geraden, das Dreieck ist dem Kegelschnitt konjugiert[53]. Wie leicht zu zeigen, giebt es ∞^3 Poldreiecke eines Kegelschnitts; auf irgend eines derselben als Koordinatendreieck bezogen kann die Gleichung der Kurve nur die Quadrate der Veränderlichen enthalten, und umgekehrt.

---

49) *Simson,* Sect. con., p. 157 und 212; *Maclaurin,* Appendix zu „A treatise of algebra", § 35—37 (1748); *Carnot,* Géom. de pos., Nr. 400. Zur Konstruktion der Polare, wenn P und der Kegelschnitt k gegeben, zieht man am besten durch P drei Sekanten, die k in A und D, B und E, C und F schneiden; alsdann treffen sich je zwei kreuzweise gezogene Verbindungslinien wie AE und BD, AF und CD in Punkten der Polare. (Wohl schon *De la Hire* bekannt, vgl. Sect. con. Buch 1, prop. 22; Buch 2, prop. 30.)

50) *Carnot* a. a. O. Nr. 401; *Sturm,* Ann. de math. 16 (1826), p. 289.

51) Zur Konstruktion der Doppelelemente aus 2 Punktepaaren der Involution vgl. *Poncelet,* Traité Nr. 374 f.; *Chasles,* Aperçu hist., Brüssel 1837, Note 10 = Deutsche Übers. von *L. A. Sohncke,* Halle 1839, p. 321—324.

52) „Geom. d. Lage", Nürnberg 1847, § 18 und 19. Näheres über Polarsysteme auch bei *Steiner-Schröter,* 4. Abschn.; *Bobek* „Einleitung in die projektive Geom.", Leipzig 1897, Kap. IV, § 4; *R. Böger* „Ebene Geom. d. Lage", Leipzig 1900 (Sammlung *Schubert* VII), § 16.

53) Die Bezeichnung Polardreieck hat *Chr. von Staudt,* „Geom. d. Lage", p. 132. *Steiner* nennt die Ecken drei zugeordnete harmonische oder konjugierte Pole.

11. Konjugierte Durchmesser. Rückt der Pol P ins Unendliche, so sind die durch ihn gezogenen Sekanten parallel, die Polare ist der Ort für die Mitten der aus den Sekanten durch den Kegelschnitt k herausgeschnittenen Sehnen, sie ist der zur Richtung des Sehnensystems *konjugierte Durchmesser*[54]). Durchläuft P die unendlich ferne Gerade g_∞, so ändert sich die Richtung des zugehörigen Sehnensystems, die den einzelnen Richtungen konjugierten Durchmesser gehen sämtlich durch den Pol von g_∞, den *Mittelpunkt* M der Kurve, der die Mitte aller auf den Durchmessern durch k abgeschnittenen Sehnen bildet. Insbesondere nennt man zwei Durchmesser d_1 und d_2 konjugiert, wenn der eine durch den unendlich fernen Pol des anderen geht oder also, wenn der eine die zu dem anderen parallelen Sehnen halbiert. Diese Eigenschaft ist wechselseitig. Das von M bis zur Kurve gemessene Stück eines Durchmessers heisst Halbmesser.

Zusammen mit g_∞ bilden d_1 und d_2 ein Poldreiseit von k, im Falle eines Parabel werden jedoch alle Durchmesser parallel. Im Mittelpunkt M schneiden sich auch die in den unendlich fernen Punkten gezogenen Tangenten, die Asymptoten, denn die zugehörige Berührungssehne ist g_∞ und M deren Pol. Zwei konjugierte Durchmesser liegen zu den Asymptoten harmonisch[55]) (Nr. **10**); ist k eine Hyperbel, so schneidet daher nur der eine die Kurve in reellen Punkten. Sind diese A und B und trifft die Tangente von A die eine Asymptote in E, die andere in F, während die Tangente von B die erstgenannte Asymptote in G, die andere in H schneidet, so versteht man unter der Länge $2b_1$ des zu $AB = 2a_1$ konjugierten Durchmessers das durch die Gegenseiten EH, FG des Parallelogramms $EFGH$ begrenzte Stück des Durchmessers. Ferner folgt, dass auf jeder Hyperbelsekante die zwischen der Kurve und den Asymptoten gelegenen Abschnitte einander gleich sind[56]). Bei der gleichseitigen Hyperbel werden die Winkel zweier konjugierten Durchmesser von den Asymptoten halbiert, und es ist $a_1 = b_1$.

Die in den Schnittpunkten von k mit einem Durchmesser d_1 ge-

54) Schon bei *Apollonius*, Buch 1, § 16. Die Gleichung des zu einer gegebenen Richtung konjugierten Durchmessers giebt *Gergonne*, Ann. de math. 5 (1814), p. 63—65 bei schiefwinkligen Koordinaten.

55) *De la Hire*, Sect. con., Buch 2, coroll. 4 zu prop. 13.

56) *Apollonius*, Buch 2, § 8. Mit Hülfe dieses Satzes beweist er Buch 2, § 12 eine Verallgemeinerung der durch $xy = \text{const.}$ (Nr. **3**) ausgedrückten Eigenschaft der Hyperbel, nämlich: Zieht man durch irgend einen Kurvenpunkt in beliebiger Richtung bis an jede Asymptote eine Gerade, durch einen anderen Kurvenpunkt Parallelen zu diesen Geraden, so sind die aus diesen Geradenpaaren gebildeten Rechtecke einander gleich. Vgl. Fussnote 15.

zogenen Tangenten sind zum konjugierten Durchmesser d_2 parallel, denn der Pol von d_1 liegt auf d_2 im Unendlichen[57]). Hieraus folgt leicht, dass bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Parallelogramm die Diagonalen konjugierte Durchmesser sind, während die Seiten eines eingeschriebenen Parallelogramms solchen Durchmessern parallel sind[58]). Die Sehnen, die die Endpunkte eines Durchmessers mit einem beliebigen Kurvenpunkt verbinden, sind somit einem Paar konjugierter Durchmesser parallel; solche Sehnen heissen Supplementarsehnen[59]).

12. Kriterien der C_2 und C^2. Die Koordinaten der Polare eines Punktes y in Bezug auf $f(x, x) = 0$ sind nach (13):

(20) $\varrho u_i = \frac{1}{2} f'(y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor.

Die Auflösung dieser Gleichungen nach y_i ist eindeutig, so lange $A \gtrless 0$; nur dann gehört zu jeder Geraden u ein bestimmter Pol y, dessen Koordinaten zu $\frac{1}{2} F'(u_i)$ proportional sind[60]). Im Falle $A = 0$ giebt es, so lange nicht alle A_{ik} verschwinden, ein die drei Gleichungen $\frac{1}{2} f'(z_i) = 0$ erfüllendes bestimmtes Wertsystem $z_1 : z_2 : z_3$; dasselbe stellt den Schnittpunkt des Geradenpaares dar, in das nun die Kurve zerfällt. Der Nachweis für dieses Zerfallen und dafür, dass umgekehrt im Falle dieser Ausartung die Determinante A verschwindet, ist auf

57) Auch dieser Satz war *Apollonius* schon bekannt (Buch 2, § 5—6); ebenso wusste er, dass der durch irgend einen Kurvenpunkt P gezogene Durchmesser alle zur Tangente von P parallelen Sehnen halbiert (Buch 1, § 46—47), sowie dass die Verbindungslinie des Schnittpunktes Q zweier Tangenten mit der Mitte N der Berührungssehne ein Durchmesser ist, während umgekehrt ein Durchmesser QM stets die zu Q gehörige Berührungssehne halbiert (Buch 2, § 29—30).

58) *Ferriot,* Ann. de math. 16 (1826), p. 373; vgl. auch *Rochat,* ebenda 3 (1812), p. 25—27.

59) Weitere Sätze z. B. bei *Chasles*, sect. con., p. 120.

60) Auf Grund dieser Thatsache lässt sich sofort die Gleichung des Tangentenpaares aufstellen, das in den Schnittpunkten von $f(x, x) = 0$ mit einer Geraden $u_x = 0$ gezogen ist, man hat nur in (14) $y_i = \frac{1}{2} F'(u_i)$ zu setzen, wodurch sich ergiebt $F(u, u) \cdot f(x, x) - A u_x^2 = 0$. Bei festen x_i, veränderlichen u_i stellt diese Gleichung die Berührungspunkte des von x an die C_2 gelegten Tangentenpaares dar. Vgl. *E. d'Ovidio,* Giorn. di mat. 6 (1868), p. 262; *G. Dostor,* Arch. Math. Phys. 57 (1875), p. 196—198; *Gundelfinger,* Vorl., p. 45 und 259. Tritt an Stelle von $u_x = 0$ die Gerade g_∞, so erhält man die Gleichung des Asymptotenpaares. (Für Parallelkoordinaten bei *Plücker,* Anal. Entw. 1, p. 137; für Dreieckskoordinaten bei *J. Wolstenholme,* Quart. J. 3 (1860), p. 182 f.; *N. M. Ferrers,* Tril. coord., p. 81; *Gundelfinger* a. a. O. Vgl. ferner *Salmon-Fiedler,* Kegelschn., 1. Aufl. Leipzig 1860, p. 596 f.; *E. d'Ovidio,* Giorn. di mat. 6 (1868), p. 265 und 271. Ebenda p. 274 f. der Ausdruck für den Winkel der beiden Asymptoten, sowie bei *Gundelfinger* a. a. O. p. 111 f. und 284 f.)

mehrfache Art geführt worden[61]). Wenn auch alle Unterdeterminanten A_{ik} Null sind, wozu schon das Verschwinden von A, A_{11}, A_{22} und A_{33} ausreicht, ist $f(x, x)$ das Quadrat eines linearen Ausdrucks, $f(x, x) = 0$ stellt eine Doppelgerade dar[62]), und umgekehrt. Die zu einem Geradenpaar $f(x, x) = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten $F(u, u) = 0$ reduziert sich, wie aus den Koordinaten des Schnittpunktes z des Geradenpaares folgt, auf $(z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3)^2 = 0$, sie stellt den Punkt z doppelt zählend dar; ist $f(x, x) = 0$ eine Doppelgerade, so verschwindet $F(u, u)$ identisch[63]).

Mit Beantwortung der Frage, was für eine Kegelschnittart durch eine gegebene Gleichung $f(x, x) = 0$ dargestellt wird, hat sich schon *De l'Hospital* beschäftigt[64]); wir teilen hier die allgemeinsten, für Dreieckskoordinaten mit beliebigem Einheitspunkte gültigen Kriterien mit, die *S. Gundelfinger* gegeben hat[65]). Die Kurve (8) $f(x, x) = 0$ wird von der unendlich fernen Geraden $p_x \equiv p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$ in zwei reellen, imaginären oder zusammenfallenden Punkten getroffen, je nachdem $F(p, p) < 0, > 0$ oder $= 0$. Solange $A \gtrless 0$, stellt daher (8)

---

61) Die Ausartung bei $A = 0$ erwähnt zuerst wohl *A. J. Hermann,* Petrop. Comm. 4 (1729), p. 19 f., gedruckt 1735. Vgl. ferner *G. Lamé,* Examen des méth., p. 71 f.; *Plücker,* Anal. Entw. 1, p. 131 f.; System d. Geom., p. 85 f.; *Hesse,* 7 Vorl., p. 4 f. = Zeitsch. Math. Phys. 19, p. 4 f. Die beiden Geraden wurden von *Cayley,* Lond. Trans. 152, Teil 2 (1862), p. 643 = Coll. papers 4, p. 399 f. einzeln dargestellt durch Ausdrücke mit zwei Reihen von je drei willkürlichen Grössen, sowie von *Gundelfinger,* Vorl., p. 262 f. und 38. Über ein allgemeines Schlussverfahren bez. derartiger Ausnahmefälle s. *W. Fr. Meyer,* D. M.-V. 9 (1901), p. 85.

62) *Plücker,* Anal. Entw. 1, p. 133 f.

63) *Cayley,* Lond. Trans. 152, Teil 2 (1862), p. 640 = Coll. papers 4, p. 397.

64) Sect. con., p. 213—248. Vgl. ferner *Hermann,* Petrop. Comm. 4 (1729), p. 15—25, gedruckt 1735; *J. B. Biot,* Essai de géom., 4. Aufl. Paris 1810, p. 222—246; *L. J. Magnus,* Aufg., p. 101—122; *N. M. Ferrers,* Tril. coord., p. 92; *E. d'Ovidio,* Giorn. di mat. 6 (1868), p. 50—52; *J. A. Grunert,* Arch. Math. Phys. 51 (1870), p. 276—308, 330—340; *W. E. Story,* Amer. J. 6 (1884), p. 223 ff.; *F. Porta,* „Discuss. delle equaz. gen. delle coniche", Torino 1893. *K. Hensel,* J. f. Math. 113 (1894), p. 303—317 hat die C_2 nach der Äquivalenz der nicht homogenen quadratischen Formen, die gleich Null gesetzt die Kurve darstellen, klassifiziert; die durch eine reale endliche Koordinatentransformation ineinander überführbaren Gebilde gehören derselben Klasse an [I B 2, Nr. 3]. *C. Koehler,* Arch. Math. Phys. (3) 3 (1901), p. 21—33, 94—111, hat bei Annahme eines beliebigen Koordinatendreiecks einerseits für die projektive, andrerseits für die metrische Einteilung von einander unabhängige Kriterien zusammengestellt. Bezüglich der Art des durch den Mittelpunkt und 3 Kurvenpunkte oder den Mittelpunkt und drei Tangenten bestimmten Kegelschnitts vgl. Nr. 75.

65) Vorl., p. 46—51.

diesen Fällen entsprechend eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel dar; im Falle $F(p, p) > 0$ kann es allerdings eintreten, dass die Kurve von *jeder* Geraden in imaginären Punkten getroffen wird (imaginäre Ellipse). Als Kriterium hierfür ergiebt sich $Af(y, y) > 0$, wo y irgend einen Punkt auf g_∞ bedeutet; $Af(y, y) < 0$ entspricht zusammen mit $F(p, p) > 0$ der reellen Ellipse. Das bei $A = 0$ auftretende Geradenpaar ist reell oder imaginär, je nachdem $F(p, p) < 0$ oder > 0, sein Schnittpunkt liegt beidemal im Endlichen; $F(p, p) = 0$ liefert ein reelles oder imaginäres Parallelenpaar, je nachdem unter den Grössen A_{ii} eine willkürlich ausgewählte negativ oder positiv ist, man hat hier unendlich viele Mittelpunkte.

Wenn bei Parallelkoordinaten x, y die Gleichung der Kurve $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ lautet, tritt bei diesen Kriterien A_{33} an Stelle von $F(p, p)$, a_{11} oder a_{22} an Stelle von $f(y, y)$.

Bei Anwendung obiger Resultate auf die zu (17) $\varphi(u, u) = 0$ gehörige Gleichung in Punktkoordinaten $\Phi(x, x) = 0$ erhält man die Kriterien der C^2;[66]) natürlich artet im Falle $\sum \pm (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}) = 0$ die Kurve in zwei Punkte aus[67]), die beide im Endlichen liegen, so lange $\varphi(p, p) \gtrless 0$. Bei Parallelkoordinaten tritt α_{33} an Stelle von $\varphi(p, p)$.

13. Axen des Kegelschnitts. Imaginäres Kreispunktepaar. Da unter den Paaren konjugierter Geraden eines involutorischen Büschels im allgemeinen ein Paar zueinander rechtwinkliger Geraden enthalten ist, hat ein Kegelschnitt im allgemeinen nur ein Paar rechtwinkliger konjugierter Durchmesser, die man *Axen* nennt[68]). Bei der Parabel fällt die eine Axe ins Unendliche. Es kann aber auch eintreten, dass *alle* Paare konjugierter Durchmesser zueinander rechtwinklig sind, die Kurve ist dann ein Kreis. Seine unendlich vielen Axenpaare treffen g_∞ in Punktepaaren, die zu einem und demselben imaginären Punktepaar $J, \mathfrak{J}$ harmonisch liegen, also eine Involution bilden; die Doppelstrahlen der durch die Axenpaare gebildeten Involution bestehen aus

66) *Plücker,* Anal. Entw. 2, p. 49—56 und 88—96; *Gundelfinger,* Vorl., p. 51—53.

67) Die Frage, inwieweit die Ausdrucksweise berechtigt ist, ein Kegelschnitt arte kontinuierlich in ein Geradenpaar oder ein Punktepaar aus, ist von *C. Taylor,* Quart. J. 8 (1866), p. 126—135; (1867), p. 343—348; 10 (1870), p. 93—96, *G. Salmon* und *Cayley,* Quart. J. 8 (1866), p. 235 f. erörtert worden. Wichtig sind solche Untersuchungen für die abzählende Geometrie (Charakteristikentheorie); vgl. III C 11.

68) Schon *Apollonius,* Buch 2, § 46—48 zeigte, wie man das Axenpaar findet wenn die Kurve gezeichnet vorliegt.

den imaginären Asymptoten des Kreises (Nr. **10**). Die Punkte J, $\mathfrak{J}$, die sogenannten imaginären Kreispunkte[69]), gehören allen Kreisen der Ebene an, womit die elementare Thatsache erklärt ist, dass ein Kreis schon durch drei Punkte bestimmt ist. Konzentrische Kreise insbesondere sind als solche anzusehen, die sich in J und $\mathfrak{J}$ berühren[70]).

14. Transformation der C_2 auf die Axen. Unter der Axentransformation der C_2 versteht man die Einführung von Koordinatenaxen, die mit den Axen der Kurve zusammenfallen; natürlich kommen bei dieser Transformation nur solche C_2 in Betracht, deren Mittelpunkt nicht ausschliesslich im Unendlichen liegt. Zusammen mit y_∞ bilden die Axen ein Poldreiseit der Kurve; bei Einführung von Cartesischen Koordinaten X, Y kann daher die transformierte Gleichung ausser den Gliedern mit X^2 und Y^2 nur noch ein absolutes Glied enthalten[71]).

69) Bei Autoren englischer Zunge cyclic oder circular points, franz. points circulaires, ital. punti ciclici. *Poncelet* führte diesen Begriff ein (Traité, Nr. 94 und 95) und reduzierte mit dessen Hülfe metrische Begriffe auf projektive. Eine Gerade, die J oder $\mathfrak{J}$ mit einem im Endlichen gelegenen Punkte verbindet, wird von engl. Autoren isotropic line genannt; *S. Lie* nannte sie Minimalgerade, bei *Gundelfinger*, Vorl., p. 329 heisst sie zirkulare Gerade.

70) *Poncelet* a. a. O.; *Chasles*, Géom. sup., Nr. 728.

71) Schon *J. L. Lagrange* wusste, dass sich eine homogene Funktion 2. Grades von n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ im allgemeinen in eine Summe von n Quadraten transformieren lasse; für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ führt er die Transformation durch (Misc. Taur. 1759 = Oeuvres publ. par *J. A. Serret*, 1, p. 7), ebenso *K. F. Gauss* für $n = 3$ („Disquisitiones arithmeticae" [1801], Nr. 271 = Werke 1, p. 305 f.). *C. G. J. Jacobi* hat die Transformation von *Lagrange* tiefer erforscht und die bei ihr auftretenden linearen Funktionen der x_i independent darzustellen gelehrt (J. f. Math. 53, p. 266—270, durch *C. W. Borchardt* aus dem Nachlass mitgeteilt = *Jacobi*'s ges. Werke 3, p. 586—590). Auch *Plücker* (J. f. Math. 24 (1842), p. 287—290 = Ges. Abh. 1, p. 399—403) giebt eine Darstellung der Transformation, die vor der *Jacobi*'schen wesentliche Vorzüge besitzt. Noch ausführlicher untersucht *Gundelfinger*, J. f. Math. 91 (1880), p. 221—237 den Gegenstand. Bei jeder solchen Transformation bleibt, wie *J. Sylvester* zuerst (Phil. mag. (4) 4 (1852), p. 140—142, ferner Lond. Trans. 143 (1853), p. 481) bekannt machte, die Anzahl der Quadrate eines und desselben Vorzeichens erhalten (law of inertia for quadratic forms, Trägheitsgesetz der quadratischen Formen). *Jacobi* kannte diese Thatsache schon 1847, die betreffende Arbeit wurde aber erst 1857 durch *Borchardt* aus *Jacobi*'s Nachlass mitgeteilt (J. f. Math. 53, p. 275—280 = *Jacobi*'s ges. Werke 3, p. 591—598). Vgl. auch einen ebenda p. 271—274 veröffentlichten Brief von *Ch. Hermite* an *Borchardt*, sowie eine Mitteilung von *Borchardt*, ebenda p. 281—283 = *Borchardt*'s ges. Werke p. 469—472, ferner *F. Brioschi*, Nouv. ann. 15 (1856), p. 264—269; *De Presle* Par. soc. math. Bull. 15 (1887), p. 179 ff.; vgl. weiter I B 2, Nr. **3.** Von rechtwinkligen Koordinaten ausgehend haben schon *J. B. Biot*, Essai de géom. anal., 4. Aufl. Paris 1810, p. 254—256 und *Rochat*, Ann. de math. 2 (1812), p. 331—335 die Transformation der C_2 auf die Axen durchgeführt; *Plücker*, Anal. Entw. 1,

Befindet sich der Koordinatenanfang irgend eines rechtwinkligen Systems schon im Mittelpunkt der C_2, so sind solche lineare Substitutionen $x = a_1 X + a_2 Y$, $y = b_1 X + b_2 Y$ zu bestimmen, durch die nicht nur

$$(21) \qquad a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$

wird, sondern auch $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$, da das Quadrat des Radiusvektors eines beliebigen Punktes für beide Systeme denselben Ausdruck hat; es handelt sich um sogenannte *orthogonale Substitutionen*[72]). Diese Forderungen führen zu 6 Gleichungen zwischen a_1, a_2, b_1, b_2, λ_1, λ_2; drei derselben sind $a_1^2 + b_1^2 = 1$, $a_2^2 + b_2^2 = 1$, $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, zwei der übrigen enthalten auch λ_1 und λ_2. Schliesslich folgt, dass λ_1, λ_2 Wurzeln sind der quadratischen Gleichung[73]):

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

die stets reelle Wurzeln hat[74]). Bei beliebigen Dreieckskoordinaten hat *Gundelfinger* die Transformation der C_2 auf die Axen durch-

p. 145 f.; bei schiefwinkligen Koordinaten *Gergonne,* Ann. de math. 5 (1814), p. 70 f.; *Magnus,* Aufg. u. Lehrs., p. 110—113 (1833); bei Linienkoordinaten *Plücker,* Anal. Entw. 2, 2. Abschn. § 1—3; System d. Geom., p. 84—113.

72) Die allgemeinere Aufgabe, jede von 2 homogenen Funktionen 2. Ordnung mit n Veränderlichen in die Summe von n Quadraten zu transformieren, wurde von *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1833), p. 50—57 = Werke 3, p. 247—255 und mit Hülfe der Invariantentheorie von *S. Aronhold,* J. f. Math. 62 (1863), p. 317—319, sowie 328 f. gelöst. Vgl., auch wegen weiterer Litteratur, I B 2, Nr. **3.**

73) *Hesse,* „Vorl. üb. anal. Geom. d. Raumes", 1. Aufl. Leipzig 1861, p. 237 ff.; „Vorl. aus d. anal. Geom. der geraden Linie etc.", 2. Aufl. Leipzig 1873, p. 124—127; *M. Greiner,* Arch. Math. Phys. 57 (1875), p. 337—342; *C. Lolli,* Giorn. di mat. 28 (1890), p. 193—201.

74) Analog gebaute Gleichungen n^{ten} Grades (dargestellt durch eine Determinante mit Elementen $a_{ii} - \lambda$ und $a_{ik} = a_{ki}$, wobei alle a reell) haben stets reelle Wurzeln, wie zuerst *A. Cauchy,* Exercices de math. (anciens exercices) 4, Paris 1829, p. 141—152 = Oeuvres (2) 9, p. 175—187 allgemein bewies, nachdem für $n = 3$ bereits *Lagrange,* Berl. Nouv. mém. année 1773, p. 108 ff. = Oeuvres 3, p. 603—605 die Thatsache festgestellt hatte. Vgl. auch *E. Kummer,* J. f. Math. 26 (1843), p. 268—270; *Jacobi,* ebenda 30 (1844), p. 46—50 = Werke 3, p. 459—465; *G. Bauer,* J. f. Math. 71 (1868), p. 40—45. Andere Beweise der Reellität der Wurzeln bei beliebigem n gaben *Borchardt,* J. f. Math. 30 (1845), p. 38—45 = Ges. Werke, p. 1—13, sowie J. de math. 12 (1847), p. 50—67 = Ges. Werke, p. 15—30; *Sylvester,* Phil. mag. (4) 4 (1852), p. 138—140. *Cauchy* zeigte auch a. a. O. p. 157—159 bezw. 192—194, dass bei der Transformation einer homogenen Funktion 2. Grades von n Veränderlichen x_i in einen Ausdruck $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \cdots + \lambda_n X_n^2$ die λ_i Wurzeln einer Gleichung der erwähnten Art sind, falls $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$. Vgl. I B 2, Nr. **3.**

geführt[75]); er benutzt dabei den Begriff des Normalenzentrums einer Geraden: den unendlich fernen Schnittpunkt aller Normalen der Geraden und definiert als Axe der C_2 eine im Endlichen liegende Gerade, die mit der Polare ihres Normalenzentrums zusammenfällt. Die Aufgabe kommt darauf hinaus, zwei ternäre quadratische Formen mit kontragredienten Veränderlichen gleichzeitig in eine Summe von 3 bezw. 2 Quadraten zu verwandeln. Man wird hierbei auf die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - [a, \omega]\lambda + \tau F(p, p) = 0 \tag{23}$$

geführt, in der τ eine vom Koordinatendreieck und der Lage des Einheitspunktes abhängige Konstante bedeutet, während

$$[a, \omega] = a_{11}\omega_{11} + 2a_{12}\omega_{12} + a_{22}\omega_{22} + 2a_{13}\omega_{13} + 2a_{23}\omega_{23} + a_{33}\omega_{33} \tag{24}$$

ausser den a_{ik} die Koeffizienten ω_{ik} der Gleichung $\omega(u, u) = 0$ enthält, die das imaginäre Kreispunktepaar darstellt. Auch (23) hat, wie *Gundelfinger*[76]) unter Ausdehnung eines Satzes von *K. Weierstrass*[77]) zeigte, stets reelle Wurzeln.

Da (22) und (23) in λ quadratisch, giebt es im allgemeinen zwei Richtungen, zu denen die zugehörigen konjugierten Durchmesser normal sind; diese Richtungen schliessen aber — in Übereinstimmung mit der Existenz von (im allgemeinen) nur einem Paar zueinander rechtwinkliger konjugierter Durchmesser — selbst wieder einen rechten Winkel ein.

Die Gleichung der transformierten Kurve wird:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \varkappa = 0, \text{ wo } \varkappa = A : F(p, p); \tag{25}$$

die Quadrate der Halbaxen werden[78]):

$$a^2 = -\frac{\varkappa}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{\varkappa}{\lambda_2}. \tag{26}$$

15. Besondere Fälle der Axentransformation. Besondere Beachtung verdient der Fall $\lambda_1 = \lambda_2$, in dem die Diskriminante von (22) oder (23) verschwindet; die C_2 ist dann ein *Kreis*. Die Diskriminante Δ lässt sich als Summe zweier Quadrate darstellen; bei Parallelkoordinaten mit w als Winkel der Koordinatenaxen wird z. B.[79])

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 w + [(a_{11} + a_{22}) \cos w - 2a_{12}]^2, \tag{27}$$

75) Vorl., p. 85—91. 76) Ebenda, p. 70 f.

77) Berl. Monatsb. 1858, p. 207—217 — Werke 1, p. 232—243.

78) *Gundelfinger*, Vorl., p. 110.

79) *Grunert*, „Elem. d. anal. Geom.“, Leipzig 1839, 2. Teil, p. 14; Arch. Math. Phys. 51 (1870), p. 306 und 281. Bei beliebigen Dreieckskoordinaten giebt *F. Dingeldey*, J. f. Math. 122 (1900), p. 195 die Zerlegung von Δ in die Summe zweier Quadrate.

und $\Delta = 0$ erfordert hier $a_{11} : a_{22} : a_{12} = 1 : 1 : \cos w$. Bezüglich der Ausartungen eines durch seine Gleichung in Punkt- oder in Linienkoordinaten gegebenen Kreises vgl. Nr. **51**, insbesondere Fussnote 335.

Für $[a, \omega] = 0$ ist nach (23) $\lambda_1 = -\lambda_2$, die C_2 somit eine *gleichseitige Hyperbel*[80]) (Nr. **3**).

Ferner ist der Fall hervorzuheben, dass die Gleichung (22) oder (23) eine Wurzel $\lambda_2 = 0$ besitzt; dann muss $F(p, p) = 0$ sein, die Kurve ist im allgemeinen eine *Parabel.* Ihre Gleichung kann nicht in die Form (25) übergeführt werden, denn der Kurvenmittelpunkt liegt nun im Unendlichen. Vielmehr stellt man die Parabel gewöhnlich durch die sogenannte „Scheitelgleichung“:

$$\lambda_1 Y^2 + 2\varrho X = 0, \tag{28}$$

dar, wobei $Y = 0$ die Axe, $X = 0$ die Tangente des Scheitels repräsentiert[81]), während

$$p = \left| \frac{2\varrho}{\lambda_1} \right| \tag{29}$$

den Parameter der Parabel (Nr. **4** sowie Fussnote 4 und 9) bezeichnet.

Mit der Transformation von $f(x, x) = 0$ in die Gestalt (25) bezw. (28) ist auch die Frage nach den Längen und Gleichungen der Axen irgend einer C_2 $f(x, x) = 0$ bezw. nach Axe, Scheiteltangente und Parameter einer Parabel $f(x, x) = 0$ beantwortet. Aber auch in anderer Weise wurden derartige Fragen erledigt[82]).

---

80) Bei Parallelkoordinaten gab *Plücker*, Anal. Entw. **1**, p. 136 die Bedingung der gleichseitigen Hyperbel; bei Dreieckskoordinaten, deren Einheitspunkt im Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises liegt (Normalkoordinaten, (coordinates normales französischer Autoren), *Ferrers,* Tril. coord., p. 82 f.; bei beliebigen Dreieckskoordinaten *Gundelfinger*, Vorl., p. 303.

81) *Biot,* „Essai de géom. anal.“, 4. Aufl. Paris 1810, p. 250—253; *Rochat,* Ann. de math. 2 (1812), p. 333—335; *Plücker,* Anal. Entw. **1**, p. 146 f.; *Magnus,* Aufg., p. 119—121; *Hesse*, 7 Vorl., p. 39 = Zeitsch. Math. Phys. **19**, p. 39; *Gundelfinger,* Vorl., p. 100—105, weitere spezielle Fälle ebenda, p. 106 f.

82) *Rochat,* Ann. de math. 2 (1812), p. 333 ff.; *Gergonne,* ebenda, p. 338; 5 (1814), p. 72; *J. B. Bérard,* Ann. de math. 3 (1812), p. 106; 6 (1815), p. 163; *Bret,* 5 (1815), p. 358 f.; *Cauchy*, Exercices de math. 3, Paris 1828, p. 65—81; *G. Dostor,* Arch. Math. Phys. 30 (1858), p. 203—206; 62 (1878), p. 293—295; 63 (1879), p. 119 f., 149—160; *Ferrers,* Tril. coord., p. 90; *J. Hensley,* Quart. J. 5 (1861), p. 181 f., ebenda (1862), p. 274; *Cayley,* ebenda (1862), p. 276 f. = Coll. papers 4, p. 506; *Salmon,* ebenda (1862), p. 310; *W. A. Whitworth,* ebenda (1862), p. 335 f.; *N. Trudi,* Giorn. di mat. 1 (1863), p. 158 f.; *H. Jeffery,* Quart. J. 8 (1867), p. 361—367; *E. d'Ovidio,* Giorn. di mat. 6 (1868), p. 262—271; ebenda 7 (1869), p. 3—11; *C. Smith*, Quart. J. 12 (1873), p. 240 f.; *J. J. Walker,* Quart. J. 15 (1878), p. 30—32; *F. X. Stoll,* Zeitsch. Math. Phys. 38 (1892), p. 286 f.; p. 293 f.;

16. Direktorkreis. Ähnliche Kegelschnitte. Bestimmt man den Winkel γ, den die von einem Punkte y an eine Kurve $f(x, x) = 0$ gelegten Tangenten einschliessen, so erhält man, z. B. bei homogenen rechtwinkligen Koordinaten[83]), den Ausdruck:

$$(30)\quad \begin{cases} \text{wo:} & \operatorname{tg}\gamma = \pm \dfrac{y_3\sqrt{-Af(y,y)}}{H}, \\ 2H = A_{33}(y_1^2 + y_2^2) + (A_{11} + A_{22})y_3^2 - 2A_{13}y_1y_3 - 2A_{23}y_2y_3. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort, dass alle Punkte, von denen betrachtet eine C_2 unter einem gegebenen Winkel γ oder dessen Nebenwinkel erscheint, im allgemeinen eine bicirkulare C_4 erfüllen [III C 3]. Schon *De la Hire* hat sich mit dieser Kurve beschäftigt; auch bemerkte er, dass sie sich im Falle eines rechten Winkels γ auf einen mit der C_2 konzentrischen Kreis vom Radius $\sqrt{a^2 \mp b^2}$ reduziert, wo das obere oder untere Vorzeichen zu stehen hat, je nachdem die C_2 eine Ellipse oder Hyperbel ist. Im Falle einer Parabel geht die C_4 bei beliebigem γ in eine Hyperbel über, bei $\gamma = 90^0$ in die Direktrix der Parabel in Verbindung mit der unendlich fernen Geraden. Vgl. auch Nr. **29**. Der erwähnte Kreis wird gewöhnlich als *Direktorkreis* oder Hauptkreis des Kegelschnitts bezeichnet[84]). Bei Hyperbeln ist er nur reell, wenn $a > b$; für $a = b$ reduziert er sich auf die vom Kurvenmittelpunkt nach den imaginären Kreispunkten gezogenen Geraden.

Der Winkel α, den die Asymptoten eines Kegelschnitts einschliessen, ergiebt sich aus (30), wenn man an Stelle von y_1, y_2, y_3

A. H. Anglin, Edinb. math. soc. Proc. 11 (1893), p. 8—18; *Gundelfinger* giebt u. a. Gleichungen, die die Hauptaxen zugleich mit ihrem unendlich fernen Punkte darstellen (Vorl., p. 93; p. 96 f.; p. 103—106; 285—294).

83) Bei Normalkoordinaten (vgl. Fussnote 80) giebt die Formel *W. S. Burnside* in *Salmon-Fiedler*, Kegelschn. 5. Aufl., p. 690, bei beliebigen Dreieckskoordinaten *Gundelfinger*, Vorl., p. 274—276.

84) *De la Hire*, Sect. con., p. 193—196; Par. Hist. (1704), Paris 1706, p. 220—232. *De l'Hospital* bemerkte, dass ein Brennpunkt der im Falle der Parabel bei beliebigem γ auftretenden Hyperbel mit dem Brennpunkt der Parabel zusammenfällt (Sect. con., p. 270), und *Poncelet* erkannte das Zusammenfallen der zugehörigen Direktricen (Ann. de math. 8 (1818), p. 208 = Appl. d'anal. 2, p. 481, sowie Traité Nr. 481). *Poncelet* ging von dem Kegelschnitt $y^2 + Ax^2 + Bx = 0$ aus und untersuchte, wann die zugehörige C_4 zerfällt. Interessante Sätze über die C_4 giebt auch *F. H. Siebeck*, J. f. Math. 59 (1861), p. 173—182. Der Ausdruck Direktorkreis (director circle) scheint von englischen Autoren herzurühren, während französische Schriftsteller unter cercle directeur meist den Kreis verstehen, der um einen der Brennpunkte als Mittelpunkt beschrieben ist und dessen Radius so gross wie die Hauptaxe ist [152]); auch orthoptic circle ist bei englischen Autoren gebräuchlich.

die homogenen Koordinaten A_{13}, A_{23}, A_{33} des Mittelpunktes einsetzt. Man erhält $\operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{2\sqrt{-A_{33}}}{a_{11}+a_{22}}$, oder mit Rücksicht auf (22) $-\frac{4\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, woraus nach (26) folgt, dass $\operatorname{tg}\alpha$ nur von dem Verhältnis $a:b$ der Axen abhängt (vgl. auch Nr. **3**). Kegelschnitte, für die dieses Verhältnis dasselbe ist, heissen *ähnlich*; sie haben offenbar auch gleiche numerische Exzentrizität, und umgekehrt. Somit sind alle Parabeln (Nr. 4) einander ähnlich. Tritt zur Ähnlichkeit noch gleiche Axenrichtung, so sind die Kurven auch *ähnlich liegend* (homothetisch bei *Chasles*, Ann. de math. 18 (1828), p. 280); zwei solche Kegelschnitte haben dieselben unendlich fernen Punkte. Bei rechtwinkligen Koordinaten sind alsdann die Koeffizienten der entsprechenden Glieder 2. Grades in den Kurvengleichungen einander proportional, und umgekehrt[85]).

17. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser. Umschriebene oder eingeschriebene Parallelogramme. Mit Hülfe der auf irgend zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenaxen bezogenen Gleichung (Nr. **10** und **11**):

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \tag{31}$$

einer C_2 lassen sich leicht zwei Sätze herleiten, die schon *Apollonius*[86]) durch planimetrische Betrachtungen gefunden hatte. Es sind folgende: 1) Alle Parallelogramme, deren zwei Paare von Gegenseiten durch die in den Endpunkten zweier konjugierten Durchmesser gezogenen Tangenten gebildet werden, haben gleichen Inhalt, der also mit dem Inhalt des Rechtecks der Scheiteltangenten übereinstimmt. 2) Bei der Ellipse ist die Summe der Quadrate zweier konjugierten Durch-

85) Bezüglich der oben angegebenen Bedingungen für Ähnlichkeit mit oder ohne ähnliche Lage vgl. *Salmon*, „A treatise on conic sections", Dublin 1848, p. 190—194, oder *Salmon-Fiedler*, p. 406—411; für beliebige Dreieckskoordinaten *Gundelfinger*, Vorl., p. 290 ff. Die Gl. eines Kegelschnitts k, der zu $f(x, x) = 0$ ähnlich und ähnlich gelegen ist, lässt sich in die Gestalt $\lambda f(x, x) + p_x \cdot q_x = 0$ bringen, wo λ einen Zahlenfaktor, $p_x = 0$ die unendlich ferne Gerade, $q_x = 0$ die Verbindungslinie der zwei im Endlichen liegenden Schnittpunkte beider Kurven bedeutet. Die Ähnlichkeit aller Parabeln war schon *Archimedes* bekannt (Schrift über Konoide und Sphäroide in Opera omnia, ed. *J. L. Heiberg*, Bd. 1, Leipzig 1880, p. 279; Übers. von *E. Nizze*, Stralsund 1824, p. 152; vgl. auch *Apollonius* Buch 6, § 11).

86) Buch 7, § 31 und § 12—13. Ihren tieferen Grund haben beide Sätze darin, dass A, $F(p, p)$, $[a, \omega]$ Invarianten von $f(x, x)$, p_x und $\omega(u, u)$ (Nr. **14**) sind; die ersten Spuren zu dieser Bemerkung finden sich bei *G. Boole*, Cambr. math. J. 3 (1841), p. 11 f. und p. 106—119; Cambr. Dubl. math. J. 6 (1851), p. 87—106. Vgl. auch *Plücker*, Anal. Entw. 1, p. 144 [I B 2, Nr. 1].

messer, bei der Hyperbel deren Differenz gleich der Summe bezw. Differenz der Quadrate der Axen[87]). Übrigens sind auch alle Parallelogramme, die durch Verbinden der Endpunkte konjugierter Durchmesser entstehen, inhaltsgleich, und zwar halb so gross wie das Rechteck der Scheiteltangenten[88]).

J. B. Durrande bewies, dass unter allen einer Ellipse umschriebenen Vierseiten das konjugierte Parallelogramm, d. h. das Vierseit, dessen Seiten die C_2 in den Enden konjugierter Durchmesser berühren, den kleinsten Inhalt hat, und unter allen eingeschriebenen Vierecken hat das durch die Enden konjugierter Durchmesser gebildete Parallelogramm den grössten Inhalt[89]).

Bei der Ellipse giebt es ein Paar gleich grosser konjugierter Durchmesser, auf das als Koordinatenaxen bezogen $x^2 + y^2 = a_1^2$ die Gleichung der Kurve darstellt; dasselbe fällt seiner Lage nach in die Diagonalen des Rechtecks der Scheiteltangenten[90]) und schliesst unter allen Paaren solcher Durchmesser den kleinsten spitzen Winkel ein. Mit Rücksicht auf die oben unter 1) und 2) angeführten Sätze folgt leicht, dass unter allen Paaren konjugierter Durchmesser die Summe der gleichen am grössten, die Summe der rechtwinkligen am kleinsten ist[91]). Noch sei ein Satz von *Bobillier* erwähnt, nach dem bei der

87) Auch die Summe bezw. Differenz der Quadrate der Projektionen irgend zweier konjugierten Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel auf eine beliebig gewählte Gerade ist konstant. *Plücker,* System d. Geom., p. 97; weitere Folgerungen bei *Chasles,* J. de math. 2 (1837), p. 394 und 405.

88) *De la Hire,* Sect. con., p. 86 und 100.

89) Ann. de math. 12 (1821), p. 142 f. und ebenda (1822), p. 223 f. Unter allen einem Parallelogramm eingeschriebenen Ellipsen ist diejenige die grösste, welche die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten zu konjugierten Durchmessern hat; unter den umschriebenen Ellipsen ist diejenige die kleinste, welche die Diagonalen zu konjugierten Durchmessern hat (*Durrande* a. a. O. p. 143). Nach *Steiner,* J. f. Math. 37 (1847), p. 182 ff. = Werke 2, p. 411 ff. giebt es unter allen einer Ell. eingeschriebenen Vierecken unendlich viele von gleichem maximalem *Umfang*; ihre Ecken liegen in den Berührungspunkten der Seiten irgend eines umschriebenen Rechtecks. Jeder Ellipsenpunkt ist Ecke eines Vierecks von maximalem Umfang, der doppelt so gross ist als die Diagonale des betreffenden Rechtecks. Alle diese Vierecke sind Parallelogramme, und die in ihren Ecken gezogenen Kurvennormalen halbieren die zugehörigen Winkel des Parallelogramms, wie ja nach *Steiner,* J. de math. 6 (1841), p. 169 = J. f. Math. 24 (1842), p. 151 f. = Werke 2, p. 241 überhaupt unter allen einer beliebigen Kurve eingeschriebenen Polygonen nur bei demjenigen der Umfang ein Maximum oder Minimum sein kann, dessen Winkel durch die Kurvennormalen halbiert werden. Vgl. auch Nr. **69**, sowie *Magnus,* Aufg. § 79.

90) Vgl. z. B. *Biot*, „Essai de géom. anal.“, 4. Aufl. Paris 1810, p. 157.

91) *Apollonius,* Buch 7, § 25 und 26; *Durrande,* a. a. O. p. 168 f.

Ellipse die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Quadrate der reziproken Werte für die Längen irgend zweier zu einander rechtwinkliger Durchmesser konstant ist[92]). Mehrere Beziehungen zwischen den Längen und Richtungen von Paaren konjugierter Durchmesser haben *O'Brien, Chasles* u. A. gegeben[93]).

Eine Konstruktion der Axen eines Kegelschnitts aus einem Paar konjugierter Durchmesser D_1, D_2 (Längen $2d_1$, $2d_2$) gründet sich auf den Satz, dass zwei solche Geraden auf einer beliebig aber fest gewählten Tangente der Kurve vom Berührungspunkte aus Stücke begrenzen, deren Produkt konstant, gleich $-m^2$ ist, unter m die Länge des zur Tangente parallelen Halbmessers verstanden. Man zieht nun im Endpunkte A_1 von D_1 die Tangente t_1, trägt von A_1 aus auf der Normale dieses Punktes nach beiden Seiten hin Strecken A_1P und A_1Q von gleicher Länge $m = d_2$ ab und legt durch P und Q beliebig viele Kreise. Diese treffen t_1 in Punktepaaren R, S, für die im Fall der Ellipse $AR \cdot A_1S = -d_2^2$ ist; alsdann sind R, S auf konjugierten Durchmessern gelegen. Speziell der durch den Mittelpunkt M der C_2 gehende Kreis schneidet aus t ein Punktepaar aus, das mit M verbunden die Axen liefert, wenigstens ihrer Lage nach. Die Längen der Halbaxen sind $\frac{1}{2}(MP + MQ)$ bezw. $\frac{1}{2}(MP - MQ)$.[94])

18. Satz von Pascal. Fünf Punkte bestimmen im allgemeinen (Nr. 6) einen Kegelschnitt eindeutig; zwischen sechs gegebenen Punkten A, B, C, D, E, F der Kurve muss daher eine gewisse Beziehung stattfinden. Eine solche ist z. B. die, dass zwei Doppelverhältnisse wie $B(ACEF)$ und $D(ACEF)$ einander gleich sein müssen (Nr. 6).

---

92) Corresp. de Bruxelles 4 (1828), p. 218; Ann. de math. 19 (1829), p. 249 f. Allgemeiner zeigt *Chasles:* Sind 2 Kegelschnitte gegeben und bedeuten a_1, b_1 zwei konjugierte Halbmesser des einen, m, n die ihnen parallelen Halbmesser des zweiten, so ist $\frac{a_1^2}{m^2} \pm \frac{b_1^2}{n^2} = \text{const.}$ (J. de math. 2 (1837), p. 389), wo das doppelte Vorzeichen dem Fall der Ellipse bezw. Hyperbel entspricht.

93) *O'Brien,* Cambr. math. J. 4 (1844), p. 99 f.; *Chasles,* Sect. con., p. 126—135; *E. R. Turner,* Cambr. Dubl. math. J. 1 (1846), p. 123; *G. Dostor,* Arch. Math. Phys. 63 (1879), p. 197—204.

94) *Chasles,* Sect. con., p. 132—134. Eine von dieser unwesentlich abweichende Konstruktion giebt schon *Pappus,* Collectiones, Buch 8, prop. 14, ed. *F. Hultsch* 3 (Berlin 1878), p. 1083 f. Eine einfache Konstruktion, die den Satz von der konstanten Summe der Quadrate konjugierter Halbmesser benutzt, giebt *A. Mannheim,* Nouv. ann. 16 (1857), p. 188 f. Auf die zahlreichen anderen Konstruktionen, die gegeben wurden, können wir nicht eingehen, erwähnen nur noch solche von *L. Euler,* Petrop. Nov. Comm. 3 (1753), p. 224—234 und eine neuerdings von *F. Graefe* gegebene Zeitschr. Math. Phys. 46 (1901), p. 352 f.

Eine andere Form der Beziehung fasst die sechs Punkte als Ecken eines eingeschriebenen Sechsecks auf, und es zeigt sich, dass die Schnittpunkte der Gegenseiten eines solchen Sechsecks in einer Geraden liegen. Diesen Satz, vermutlich auch seine Umkehrung, fand 1640 *B. Pascal* im 16. Jahre seines Lebens[95]). Wird statt des beliebigen Kegelschnitts ein Paar von Geraden zu Grunde gelegt, auf denen je drei Eckpunkte des Sechsecks liegen, so gelangt man zu einem Spezialfall des *Pascal*'schen Satzes, den bereits *Pappus* kannte[96]). Auf's neue wurde der *Pascal*'sche Satz selbständig von *C. Maclaurin*, *R. Simson* und *L. N. M. Carnot* gefunden. Bei *Maclaurin* folgt der Satz sofort aus der nach ihm genannten Erzeugungsweise der Kegelschnitte: Drehen sich die Seiten xy, yz, zx eines veränderlichen Dreiecks xyz um drei feste Punkte a, c, e, während zwei seiner Ecken (y, z) auf festen Geraden B, D fortrücken, so beschreibt die dritte Ecke x einen Kegelschnitt, der durch a und e geht, sowie

95) Essais pour les coniques = Oeuvres compl. Éd. *Ch. Lahure*, Bd. 2, Paris 1858, p. 354—357. *Pascal* spricht dort den Satz zunächst für den Kreis aus (ohne Beweis), doch nicht in der kurzen heute üblichen Form; durch Projektion gewinnt er die Gültigkeit für einen beliebigen Kegelschnitt. *Pascal* kannte die Tragweite seines Satzes und baute auf ihn eine ganze Theorie der Kegelschnitte auf. In einem Schreiben an eine Vereinigung Gelehrter, aus der 1666 die Pariser Académie des sciences hervorging, erwähnt er 1654 sein conicorum opus completum et conica Apollonii et alia innumera unica fere propositione amplectens (p. 391 f. obiger Ausgabe); auch *M. Mersenne* erwähnt, dass *Pascal* aus seinem Satze 400 andere abgeleitet habe. Diese Schrift *Pascal*'s ist leider verloren, *G. W. Leibniz* hatte sie noch in Händen und berichtet 1676 über sie in einem an *Pascal*'s Neffen *Périer* gerichteten Briefe (p. 638 ff. obiger Ausgabe). *J. Curabelle* (Oeuvres de *Desargues*, hrsgg. von *Poudra*, 2, Paris 1864, p. 387) giebt schon 1644 mit den Worten „cette grande proposition La Pascale" dem Satz den Namen seines Entdeckers. Gleichwohl sind *Ch. Sturm* und *J. D. Gergonne*, Ann. de math. 17, p. 190 und 222 f. (1826 und 1827) zu der Annahme geneigt, *Desargues* habe schon vor *Pascal* den Satz gekannt. Die *Pascal*'sche Entdeckung geriet übrigens bald in Vergessenheit und wurde erst 1779 durch die Bemühungen von *Ch. Bossut* wieder ans Tageslicht gebracht, der in seiner Ausgabe der Werke *Pascal*'s den oben genannten essai veröffentlichte.

96) Collect., Buch 7, prop. 139 u. 143, Bd. 2, p. 887 u. 893 der Ausgabe von *F. Hultsch*, Berlin 1877. Bezüglich der fundamentalen Bedeutung des *Pappus*'schen Satzes bei Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie vgl. *H. Wiener*, Deutsche M. V. 1 (1891), p. 46 f; ebenda 3 (1893), p. 72; *A. Schönflies*, ebenda 1 (1891), p. 62 f.; *F. Schur*, Math. Ann. 51 (1898), p. 401—409; *D. Hilbert* „Grundlagen der Geometrie", Kap. 6, in der Festschrift zur Feier der Enthüllung des *Gauss-Weber*-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899. Ein anderer spezieller Fall des *Pascal*'schen Satzes bei *De l'Hospital*: Ist einem Kegelschnitt ein Fünfeck mit zwei Paaren paralleler Seiten eingeschrieben, so ist dessen fünfte Seite parallel zur Tangente ihrer Gegenecke (Sect. con., p. 140).

durch drei andere Punkte g, h, k, die bezw. die Schnittpunkte sind von ac und D, D und B, B und ce. Man sieht dann sofort, dass sich die Gegenseiten des Sechsecks $aghkex$ in den Punkten c, z, y einer und derselben Geraden schneiden[97]). *Maclaurin* hat später noch andere Beweise des *Pascal*'schen Satzes gegeben. *Simson*[98]) führt den Beweis mit Hülfe von Proportionalsätzen, und zwar zunächst für ein Sechseck mit einem Paar paralleler Gegenseiten, dann für den allgemeinen Fall. *Carnot* gelangt unter Anwendung eines Satzes über Transversalen zunächst zu folgendem Theorem: Sind A, B, C, D, E, F sechs willkürlich gewählte Punkte eines Kegelschnitts k, sind ferner M, N die Schnittpunkte der Geraden AB, AF mit DE bezw. DC, so gehen die Geraden MN, BC, FE durch einen und denselben Punkt. Ist nun $ABCDEF$ die Reihenfolge der auf k gelegenen Punkte, so werden BC und FE Gegenseiten, M, N die Schnittpunkte der zwei anderen Paare von Gegenseiten, und das eben erwähnte Theorem geht sofort in das *Pascal*'sche über[99]).

97) Ausgedrückt durch ein *Grassmann*'sches planimetrisches Produkt [III B 3] würde die Gleichung des Kegelschnitts lauten $xaBcDex = 0$ (*H. Grassmann,* „Die lineale Ausdehnungslehre", Leipzig 1844, § 147 = Werke 1, p. 248; J. f. Math. 31 (1845), p. 120 f. = Werke 2^1, p. 59 f.). Veranlasst wurde *Maclaurin* zu seinen Untersuchungen wahrscheinlich durch eine von *J. Newton* gefundene Erzeugung der Kegelschnitte: Drehen sich zwei konstante Winkel um ihre Scheitel und wird hierbei der Schnittpunkt des einen Schenkelpaares auf einer Geraden geführt, so beschreibt der Schnittpunkt des anderen Paares einen Kegelschnitt („Enumeratio linearum tertii ordinis", London 1706, Kapitel 7 = Opera, hrsg. von *S. Horsley,* 1, London 1729, p. 556). *Maclaurin* bemerkt, dass er seine Erzeugungsweise schon 1722 gefunden hat; er veröffentlichte sie aber erst 1735 (Lond. Trans. 39, Nr. 439, p. 163) als Anhang zu einer anderen Arbeit (ebenda p. 143). Der Anlass zur Veröffentlichung dieser Arbeit und des Schriftstückes von 1722 war die Schrift von *W. Braikenridge* „Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum", London 1733 und eine Abhandlung desselben Verfassers in Lond. Trans. 39, Nr. 436, p. 25—36 (1735). In der ersten Schrift hatte *W. Braikenridge* gezeigt, dass, wenn sich die Seiten eines veränderlichen n-Ecks um n feste Punkte drehen, während $n-1$ ihrer $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte auf festen Geraden fortrücken, die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Schnittpunkte Kegelschnitte beschreiben. Auch *Poncelet,* Traité Nr. 494 f., bewies diesen Satz. Näheres über den Prioritätstreit zwischen *Braikenridge* und *Maclaurin* bei *Cantor*, Gesch. d. Math. 3, p. 787—793 und *Kötter,* Bericht, p. 15—17. Liegen die n festen Punkte auf einer Geraden, so reduziert sich jeder Kegelschnitt auf eine Gerade, wie schon *Pappus* bekannt war, Collect. Buch 7, Bd. 2 der Ausg. von *F. Hultsch,* Berlin 1877, p. 653 und 655. Vgl. auch *Poncelet* a. a. O., Nr. 498 ff. 98) Sect. con. Buch 5, § 46 und 47.

99) Géom. de pos., Nr. 396—398. Später hat *Carnot*, wieder mit Benutzung eines Transversalensatzes, noch einen anderen Beweis gegeben und daran an-

19. Satz von Brianchon. Reziproke Polaren. Den dual entsprechenden Satz, dass sich die Verbindungslinien der Gegenecken eines einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsseits in einem und demselben Punkte schneiden, fand *C. J. Brianchon*[100]) mit Hülfe der Transformation durch *reziproke Polaren*. Allerdings wurde diese Transformation erst später durch *Poncelet* als *geometrisches Prinzip* aufgestellt[101]), aber schon vorher findet man vereinzelte Anwendungen (III A 5). Vermöge dieser Transformation lässt sich einer Kurve c eine Kurve c_1 derart zuordnen, dass die Punkte der einen Kurve die in Bezug auf einen fest gewählten Kegelschnitt genommenen Pole der Tangenten der anderen sind. Einem der einen Kurve eingeschriebenen n-Eck entspricht ein der anderen umschriebenes n-Seit.

Wir müssen es uns versagen, auf die zahlreichen später gegebenen Beweise der Sätze von *Pascal* und *Brianchon* näher einzugehen, verweisen vielmehr auf den Bericht von *Kötter*[102]).

---

schliessend den *Brianchon*'schen Satz (Nr. 19) bewiesen („Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales", Paris 1806, p. 92 ff.).

100) J. éc. polyt. 6, cah. 13 (1806), p. 301; 4, cah. 10 (1810), p. 12; Ann. de math. 4 (1814), p. 379 ff. Auch fand *Brianchon* mit Hülfe seines und des *Pascal*'schen Satzes, dass die Ecken zweier einem Kegelschnitt umschriebenen Dreiseite wieder auf einem Kegelschnitt liegen und die Seiten zweier eingeschriebenen Dreiecke einen Kegelschnitt berühren („Mémoire sur les lignes du second ordre", Paris 1817, p. 35).

101) Traité Nr. 230—235; J. f. Math. 4 (1828), p. 1—71, eine Abhandlung, die *Poncelet* schon 1824 der Pariser Akademie mitteilte, wieder abgedruckt in Traité, 2. Aufl. Paris 1866, p. 57—121, ein Auszug daraus in Ann. de math. 17 (1827), p. 265—272. Zur Auffassung obiger Transformation als Berührungstransformation vgl. III D 7.

102) Bericht, p. 14—28. Von synthetischen Beweisen, die bei *Kötter* nicht erwähnt sind, seien noch zitiert solche von *Hesse*, J. f. Math. 20 (1840), p. 303 = Werke p. 43, im Auszug Nouv. ann. 14 (1855), p. 190 f.; ferner Bull. scienc. math. astr. 1 (1870), p. 196 f. oder J. f. Math. 73 (1871), p. 371 = Werke, p. 561 f.; *H. Dufau*, Nouv. ann. (3) 1 (1882), p. 99 f.; *A. Renon*, ebenda (3) 8 (1889), p. 307; *Aubert*, ebenda p. 529—535; *P. Soulier*, ebenda (3) 9 (1890), p. 529 f. Bezüglich weiterer analytischer Beweise nennen wir *E. Hunyady*, J. f. Math. 83 (1876), p. 79—84; *F. Mertens*, ebenda 84 (1877), p. 355—357; *Gundelfinger*, Vorl., p. 126 f. Kurz und eigenartig ein von *W. F. Meyer*, Deutsche M.-V. 9 (1900), p. 93 f. gegebener Beweis, daselbst eine Erweiterung für C_{2n}, sowie auf den Raum. Auch *F. A. Möbius* verallgemeinerte den *Pascal*'schen Satz in gewisser Weise für eingeschriebene C_{2n} (J. f. Math. 36 (1847), p. 216—219 = Leipz. Ber. 1, p. 170—174 = Werke 1, p. 589—594). Andere Verallgemeinerungen gaben *E. Brassine*, Nouv. ann. (3) 1 (1882), p. 318 f. und *B. Sporer*, Arch. Math. Phys. (2) 1 (1883), p. 333 f. — Den Fall, dass die Ecken des Sechsecks aus Paaren konj. imag. Punkte bestehen, behandelt *J. Thomae*, Zeitschr. Math. Phys. 38 (1893), p. 381 ff.

Steiner zeigte, wie die Sätze von *Pascal* und *Brianchon* aus der Beziehung projektiver Elemente hervorgehen; gestützt auf die Erzeugung einer C_2 durch zwei projektive Strahlenbüschel leitete er den *Pascal*'schen Satz ab [103]).

Spezielle Fälle ergeben sich, wenn man Seiten des eingeschriebenen Sechsecks unendlich klein werden lässt. Werden z. B. drei nicht zusammenstossende Seiten unendlich klein, so folgt: Wird einem Kegelschnitt ein Dreieck eingeschrieben, so treffen die in den Ecken gezogenen Tangenten die Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden [104]). Den dual entsprechenden Satz, dass bei einem umschriebenen Dreiseit die von den Ecken nach den Berührungspunkten der Gegenseiten gezogenen Geraden durch einen Punkt gehen, hat schon 1678 *G. Ceva* [105]).

Hingewiesen sei noch auf die Anwendung des *Pascal*'schen und *Brianchon*'schen Satzes zur Konstruktion weiterer Punkte bezw. Tangenten eines Kegelschnitts aus fünf gegebenen.

20. Nähere Untersuchung der Konfiguration des Pascal'schen Sechsecks. *Steiner* vervollständigte die Sätze von *Pascal* und *Brianchon*, indem er sie zunächst auf alle 60 verschiedenen Sechsecke anwandte, die durch irgend 6 Punkte eines Kegelschnitts bestimmt sind. Den 60 Sechsecken entsprechen 60 „*Pascal*'sche Geraden" h, und *Steiner* fand nun, dass diese zu je 3 durch einen Punkt G gehen, wodurch 20 solche „*Steiner*'sche Punkte" G entstehen [106]). Diese liegen, wie *J. Plücker* [107]) erkannte, auf 15 „*Steiner-Plücker*'schen Geraden" j, und zwar enthält jede derselben 4 *Steiner*'sche Punkte, so-

103) Syst. Entw. § 24, I und § 42, I = Werke 1, p. 300 und 340 = Ostw. Klass. Nr. 82/83; vgl. auch *Steiner-Schröter*, p. 121 f.

104) *Carnot*, Géom. de pos. Nr. 399; *Bobillier*, Ann. de math. 18 (1828), p. 321—323.

105) „De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio", Mediol. 1678. Vgl. *Chasles*, Aperçu hist., Brüssel 1837, Note 7 = Übers. von *L. A. Sohncke*, Halle 1839, p. 301. Später findet sich der Satz bei *Maclaurin* (Appendix zur Algebra, § 42 (1748); 2. Aufl. 1756). Umgekehrt schneiden die Verbindungslinien irgend eines Punktes mit den Ecken eines Dreiecks die Gegenseiten in drei Punkten, die die Berührungspunkte eines eingeschriebenen Kegelschnitts bilden (vgl. *Steiner*, Ann. de math. 19 (1828), p. 48—51 = Werke 1, p. 199—201, wo noch weitere Folgerungen). Allgemeiner zeigte *Chasles*, Ann. de math. 19 (1828), p. 74 f., dass die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt k genommenen Polen der Gegenseiten durch einen und denselben Punkt Q gehen, und dual entsprechend. *Chr. v. Staudt*, J. f. Math. 62 (1862), p. 142 nannte Q den Pol des Dreiecks in Bezug auf k.

106) Ann. de math. 18 (1828), p. 339 f. = Werke 1, p. 224 f.

107) J. de Math. 5 (1829), p. 275 und 280 = Ges. Abh. 1, p. 166 und 171.

dass durch jeden Punkt G 3 Geraden j gehen. *Steiner* giebt diese und die dual entsprechenden Beziehungen ohne Beweis an[108]), nur hatte sich in seine erste Publikation[106]) ein später von *Plücker*[107]) berichtigter Irrtum eingeschlichen. *Plücker* beweist die angeführten Sätze durch Anwendung allgemeiner Symbole für die linken Seiten der Gleichungen gerader Linien unter Beihülfe kombinatorischer Betrachtungen[109]).

Hesse bemerkte die Identität des Systems der G und j mit der durch drei perspektiv liegende Dreiecke einer Ebene gebildeten Figur. Die entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken schneiden sich, wie schon *Desargues*[110]) zeigte, in drei Punkten einer Geraden γ, und *Hesse* bewies, dass diese Geraden durch einen Punkt P gehen. Die 20 Punkte G werden nun durch die 9 Ecken solcher Dreiecke, die 9 Schnittpunkte entsprechender Seiten je zweier von ihnen, das Projektionszentrum und jenen Punkt P gebildet, die 15 Geraden j durch die 9 Seiten der Dreiecke, die 3 Geraden, auf denen ihre Ecken liegen und die drei Geraden γ.[111])

Eine weitere Förderung erhielt die Theorie des *Pascal*'schen Sechsecks durch *Th. P. Kirkman*[112]). Er bildete Ausdrücke, die den

108) Syst. Entw. § 60, Nr. 54 = Werke 1, p. 450 f. = Ostw. Klass. Nr. 83.

109) *Cayley* bewies einige der *Steiner-Plücker*'schen Sätze, bei einigen bezweifelte er ihre Richtigkeit (J. f. Math. 31 (1845), p. 219—226 = Coll. papers 1, p. 322—328). Nach Kenntnis der Arbeit *Plücker*'s kam er auf den Gegenstand zurück (J. f. Math. 34 (1847), p. 270—275 = Coll. papers 1, p. 356—359) und bemerkte die Reziprozität der G und j zu einem von ihm selbst früher (J. f. Math. 31 (1845), p. 216 = Coll. papers 1, p. 320) betrachteten System von 20 Geraden und 15 Punkten. Auch weist er darauf hin, dass die G und j als Projektionen der Schnittpunkte und Schnittlinien eines gewissen Systems von sechs Ebenen angesehen werden können (J. f. Math. 34 a. a. O., sowie Quart. J. 9 (1868), p. 348—353 = Coll. papers 6, p. 129—134). Bezüglich weiterer Anwendungen dieses Projektions- und Schnittprinzips s. *W. Fr. Meyer*, Württemb. Korr.-Blatt 1884, Heft 7, 8.

110) Oeuvres, hrsgg. von *Poudra*, Bd. 1, p. 413 und 430.

111) J. f. Math. 41 (1849), p. 269—271 = Werke, p. 253—256. Vgl. auch Münch. Abh. 11^1, (1872), p. 175—183 = J. f. Math. 75, p. 1—5 = Werke, p. 585—590; italien. Giorn. di mat. 11, p. 309—312. *Hesse* erwähnt auch, dass die 20 Punkte G 10 harmonische Polenpaare des Kegelschnitts bilden, nachdem er schon früher (J. f. Math. 24 (1842), p. 43 = Werke, p. 60 f.) in den beim *Brianchon*'schen Sechsseit auftretenden dual entsprechenden 20 Geraden g' 10 harmonische Polarenpaare erkannt hatte. *Steiner* nennt zwei so zusammengehörige Punkte G Gegenpunkte (*Steiner-Schröter*, p. 126). Vgl. für das Vorhergehende auch die elegante Darstellung bei *Hesse* „Vorl. aus d. analyt. Geom. d. geraden Linie etc.“, 12. Vorl.

112) Im Manchester Courier von 1849; ferner Cambr. Dubl. math. J. 5 (1849), p. 185—200.

Kegelschnitt k nebst einer *Pascal*'schen Geraden darstellen und bewies durch passende Kombination solcher Ausdrücke nicht nur die Existenz der 20 *Steiner*'schen Punkte G, sondern auch 60 anderer Punkte H (*Kirkman*'scher Punkte), durch deren jeden 3 *Pascal*'sche Geraden h gehen, so dass auf jeder h ein G und drei H liegen[113]). Die 15 Seiten eines vollständigen Sechsecks schneiden sich, von den 6 eigentlichen Ecken abgesehen, paarweise noch in 45 Punkten Q; durch jeden derselben gehen nach *Kirkman* zwei Geraden v, die zu den durch Q gehenden Seiten harmonisch liegen und deren jede zwei Punkte H enthält, so dass durch jeden Punkt H drei der 90 Geraden v gehen.

Cayley und *G. Salmon* fanden unabhängig von einander 20 „*Cayley-Salmon*'sche Geraden" g, deren jede 3 Punkte H enthält, und *Salmon* bemerkte, dass auf jeder g ein *Steiner*'scher Punkt G liegt, sowie dass immer 4 Geraden g durch einen von 15 „*Salmon*'schen Punkten" J gehen[114]).

Der Absicht, zweckmässige Bezeichnungen für die erwähnten und andere zahlreiche in der *Pascal*'schen Konfiguration auftretende Punkte und Geraden zu geben, sind Arbeiten von *Cayley* und Miss *Ladd* gewidmet[115]).

21. Gewisse Reziprozitäten in der Pascal'schen Konfiguration. *Hesse*[116]) wies auf die Reziprozität hin, vermöge deren den von *Pascal*, *Steiner* und *Plücker* gefundenen Geraden und Punkten die von *Kirkman*, *Cayley* und *Salmon* gefundenen Punkte und Geraden gegenüberstehen, allerdings nicht im Sinn von Pol und Polare. Jedoch lassen sich, wie *G. Bauer*[117]) zeigte, Gruppen herstellen, deren jede in sich polar reziprok ist in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt.

In anderer Weise untersuchte *G. Veronese* die beim *Pascal*'schen Sechseck auftretende Dualität. Er fand, dass die 60 Geraden h und Punkte H sechs Figuren π bilden, wobei durch jeden Punkt H drei Geraden h gehen und auf jeder h drei H liegen; die zehn Punkte H einer Figur sind hierbei Pole der 10 Geraden h mit Bezug auf einen zu π gehörigen Kegelschnitt. Natürlich bestehen zwischen den ein-

113) Auch *Hesse* zeigt J. f. Math. 68 (1867), p. 194 f. = Werke, p. 541 f., wie man sofort drei solche Geraden h angeben kann.

114) *Cayley*, J. f. Math. 41 (1849), p. 66—72 und 84 = Coll. papers 1, p. 550—556. *Salmon* teilte seine Resultate *Kirkman*[112]) mit, der überhaupt noch zahlreiche weitere Gebilde angiebt, die zur *Pascal*'schen Konfiguration in Beziehung stehen.

115) *Cayley*, Quart. J. 9 (1868), p. 268—274 = Coll. papers 6, p. 116—122; Miss *Ch. Ladd*, Amer. J. 2 (1879), p. 1—12.

116) J. f. Math. 68 (1867), p. 193—207 = Werke, p. 539—556.

117) Münch. Abh. 11^3, (1874), p. 109—139.

zelnen π gewisse Beziehungen, die *Veronese* näher angiebt[118]). Später untersuchte er auch die Beziehungen der *Pascal*'schen Konfiguration zu den Gruppen der Substitutionen von 3, 4, 5 und 6 Buchstaben [I A 6]. Indem er ferner den Ecken die 6 Koordinaten eines Punktes im Raume R_5 von 5 Dimensionen zuordnet, gewinnt er Beziehungen zwischen den *Pascal*'schen Sechsecken und gewissen Konfigurationen des R_5;[119]) durch Zuordnung der 6 linearen Fundamentalkomplexe erhält er Beziehungen zu den Untersuchungen von *F. Klein*[120]) über Linienkomplexe ersten und zweiten Grades [III C 9].

22. Weitere Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck. *Grossmann*[121]) verband die Ecken zweier demselben Kegelschnitt k eingeschriebenen Dreiecke; diese Verbindungslinien liefern 6 *Pascal*'sche Sechsecke, denen 6 Geraden h zugehören, die sich zu je drei in 2 *Steiner*'schen Punkten G schneiden; auf ihrer Verbindungslinie liegen zwei andere Punkte R, S, die in gewisser Weise je einem der zwei Dreiecke zugeordnet sind[122]). Durch bestimmte Änderung der

118) Rom Linc. Atti (3) 1, (1877), p. 649—703. Die wichtigsten Resultate dieser Untersuchung auch bei *Salmon-Fiedler*, Kegelschn. 2. Teil, p. X f. (oder 4. Aufl. p. 688 ff.), sowie in der schon erwähnten [115]) Arbeit von Miss *Ladd*. Die 45 Punkte Q (Nr. **20**) bilden 15 Dreiecke Δ_{ik} entsprechend den 15 Paaren i, k, zu denen man die 6 Figuren π kombinieren kann; die 6 Geraden v, die paarweise durch die Ecken eines Dreiecks Δ_{ik} gehen, schneiden sich zu dreien in 4 Punkten Z_2, so dass in jeder v zwei Z_2 liegen. Im ganzen giebt es 60 Punkte dieser Art, die in gewisser Weise den 60 Geraden h entsprechen. Die 3 Punkte Z_2, die den drei in einem Punkte H sich schneidenden Geraden h zugehören, liegen in einer Geraden z_2; es giebt deren 60, durch jeden Punkt Z_2 gehen drei von ihnen, ebenso gehen je drei durch einen *Steiner*'schen Punkt G. Auch die Z_2 und z_2 bilden nun 6 Figuren π' von je 10 Geraden z_2 und Punkten Z_2, die wieder Polaren und Pole eines Kegelschnitts sind. Aus π' wird ein System von 60 Geraden z_3 und 60 Punkten Z_3 abgeleitet, u. s. f. Näheres auch bei *O. Dziobek*, „Neue Beiträge zur Theorie des *Pascal*'schen Sechsecks", Berlin 1882. *L. Cremona*, Rom Linc. Atti (3) 1 (1877), p. 854—874 und *H. W. Richmond*, Quart. J. 23 (1889), p. 170—179 leiteten gleichfalls einige von *Veronese* gefundene Resultate und die wichtigsten früheren Sätze ab durch Projektion der Geraden einer F_3 mit Doppelpunkt aus diesem Punkte. Vgl. ferner *G. Veronese* Rom Linc. Atti (3) 9 (1881), p. 331 ff.; *Richmond*, Quart. J. 31 (1899), p. 125—160; Math. Ann. 53 (1899), p. 161—176.

119) Ann. di mat. (2) 11 (1881), p. 143—236, sowie (1883), p. 284—290. Die Arbeit enthält eine Fülle von Resultaten.

120) Math. Ann. 2 (1869), p. 198—226. Den 10 Gruppen von Paaren *Steiner*'scher Punkte entsprechen z. B. die von *Klein* gefundenen 10 „Fundamentalflächen" 2. Grades, etc. 121) J. f. Math. 58 (1860), p. 174—178.

122) *Chr. v. Staudt*, J. f. Math. 62 (1862), p. 142—150 zeigte, dass R und S Pole der beiden Dreiecke [105]) in Bezug auf k sind; die zwei Punkte G werden sowohl durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der Kurve k als

Seitenfolge leitete *P. Joerres*[123]) aus einem *Pascal*'schen Sechseck drei andere ab, die natürlich anderen Kegelschnitten eingeschrieben sind, aber dieselbe *Pascal*'sche Gerade gemeinsam haben. *Joerres* untersuchte nun die gemeinsamen Sehnenpaare je zweier der vier Kegelschnitte. *F. Graefe*[124]) dehnte diese Untersuchungen auf die $3 \cdot 60 = 180$ Sechsecke bezw. Kegelschnitte aus, die man in der von *Joerres* angegebenen Weise aus den 60 durch 6 Kurvenpunkte bestimmten Sechsecken ableiten kann.

Wenn man in einem *Pascal*'schen Sechseck zwei Paare gegenüberliegender Seiten mit den zwei die freien Endpunkte verbindenden Diagonalen zusammennimmt, erhält man wieder ein *Pascal*'sches Sechseck; die drei *Pascal*'schen Geraden der so entstehenden drei Sechsecke schneiden sich nach *Hesse*[125]) in einem Punkte. Ist das gegebene *Pascal*'sche Sechseck zugleich ein *Brianchon*'sches, so sind auch die in eben angegebener Weise abgeleiteten zugleich *Brianchon*'sche Sechsecke; die zugehörigen drei *Pascal*'schen Geraden sind, wie *J. Lüroth*[125]) bemerkte, jedesmal die vierten harmonischen Geraden zu den Diagonalen und treffen die Seiten des betr. eingeschriebenen Kegelschnitts in dessen Berührungspunkten. *C. N. Little*[125]) zeigte, wie man aus

durch R und S harmonisch getrennt. Vgl. auch *V. Snyder*, New York Bull. math. soc. (2) 4 (1898), p. 441 f.; *L. Klug*, Monatsh. Math. Phys. 10 (1899), p. 198—217. Die Änderungen, die die *Pascal*'sche Konfiguration erleidet, wenn eine Ecke des Sechsecks den durch die 5 übrigen bestimmten Kegelschnitt durchläuft, untersuchte *C. A. v. Drach*, Math. Ann. 5 (1872), p. 404—418.

123) J. f. Math. 72 (1870), p. 331 f.

124) „Der *Pascal*'sche Satz". Diss. inaug. Bern 1879. Die 180 Sechsecke haben zu je 12 mit dem ursprünglich gegebenen zwei Ecken gemeinsam. Später fand *Graefe* noch eine grosse Zahl weiterer Sätze (Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 215 f.; „Erweiterungen des *Pascal*'schen Sechsecks etc.", Wiesbaden 1880); auch behandelte er Sechsecke, denen derselbe *Kirkman*'sche Punkt zugehört, J. f. Math. 93 (1882), p. 184—187. Hier ist noch auf einige Resultate hinzuweisen, die *L. Wedekind*, Math. Ann. 16 (1879), p. 236—244 fand gelegentlich des Studiums der durch 6 Geraden, die sich paarweise in 3 Punkten einer Geraden schneiden, gebildeten Figur. Diese Figur giebt bekanntlich zu 4 perspektiven Dreiecken, somit auch zu 4 *Pascal*'schen Sechsecken mit derselben Geraden h und schliesslich zu den oben erwähnten 180 Sechsecken Anlass.

125) *Hesse* „Vorl. über analyt. Geom. d. Raumes", 1. Aufl. Leipzig 1861, p. 38—43, 3. Aufl. (1876), p. 41—46; „Vorl. aus d. analyt. Geom. d. geraden Linie etc.", 12. Vorl.; *Lüroth*, Zeitschr. Math. Phys. 10 (1865), p. 392 ff., daselbst noch weitere interessante Sätze. *Little* Amer. J. 15 (1892), p. 190. Ein *Pascal*sches Sechseck, das zugleich ein *Brianchon*'sches ist, wird sofort durch die in Fussnote 49 erwähnte Konstruktion der Polare von P in Bezug auf k geliefert; die Polare ist die *Pascal*'sche Gerade, P der *Brianchon*'sche Punkt des Sechsecks $ABCDEF$; vgl. auch *O. Schlömilch*, Zeitsch. Math. Phys. 34 (1889), p. 188 f. Ein Sechseck, das auf 10 Arten ein *Brianchon*'sches ist, fand *A. Clebsch* (Math.

einem *Pascal*'schen Sechseck, das zugleich ein *Brianchon*'sches ist, unendlich viele solche Sechsecke ableiten kann, denen dieselbe *Pascal*'sche Gerade und derselbe *Brianchon*'sche Punkt zugehören. Man hat nur die alternierenden Seiten des Sechsecks bis zu ihrem Schnittpunkt zu verlängern und die so erhaltenen 6 Schnittpunkte mit einander zu verbinden; das dual entsprechende Verfahren wäre natürlich auch anwendbar.

23. Metrische Relationen bei eingeschriebenen oder umschriebenen Polygonen. Erwähnen wir zunächst ein „Theorem von *Carnot*" über den Schnitt einer C_2 mit den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC. Nach diesem Theorem besteht zwischen den auf den Seiten gebildeten Abschnitten (Fig. 6) die Relation:

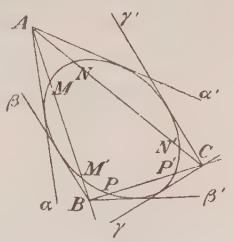

Fig. 6.

$$(32) \qquad AM \cdot AM' \cdot BP \cdot BP' \cdot CN \cdot CN' = AN \cdot AN' \cdot BM \cdot BM' \cdot CP \cdot CP'.$$

Carnot führt den Beweis [126]), indem er die in M, M', N, N', P, P' gezogenen Tangenten der C_2 als Transversalen von ABC betrachtet und jedesmal den Satz des *Menelaos* [III A 2] anwendet. Später dehnte er die Relation auf die Schnitte der Seiten eines beliebigen Polygons mit einem Kegelschnitt aus [127]). Dual entspricht dem *Carnot*'schen Theorem ein zuerst von

---

Ann. 4 (1871), p. 336 ff.) gelegentlich seiner Abbildung der Diagonalfläche 3. Ordnung (III C 6) auf die Ebene; vgl. hierzu auch *F. Klein*, Math. Ann. 12 (1877), p. 531 f., sowie „Vorl. über das Ikosaeder etc.", Leipzig 1884, p. 218; *E. Hess*, „Einl. in d. Lehre v. d. Kugelteilung", Leipzig 1883, p. 422—424; Math. Ann. 28 (1886), p. 202 ff.; *H. Schröter*, Math. Ann. 28 (1886), p. 457 ff.

126) Géom. de pos. Nr. 236—240.

127) „Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales", Paris 1806, p. 72 f. Wenn speziell die Seiten des Dreiecks die C_2 in R, S, T berühren, findet man $AR \cdot BS \cdot CT = AT \cdot BR \cdot CS$. Ein anderer besonderer Fall ist der, dass die eine Ecke, etwa A, ins Unendliche rückt [126]); dann werden AB und AC parallel (Fig. 7), und (32) verwandelt sich in $BM \cdot BM' : BP \cdot BP' = CN \cdot CN' : CP \cdot CP'$, eine Relation, die sich aus einer von *Newton* (Enumeratio linearum tertii ordinis (1706), Cap. 2, Nr. 4 = Opera, hrsgg. von *S. Horsley*, Bd. 1, London 1729, p. 533) für C_2 und C_3 ausgesprochenen sofort ergiebt. Der allgemeine für C_n giltige Satz lautet: Werden durch einen Punkt O zwei Sekanten gezogen, die eine C_n in $R_1, R_2, \ldots, R_n$ bezw. $S_1, S_2, \ldots S_n$ treffen, so ist das Verhältnis der Produkte $OR_1 \cdot OR_2 \ldots\ldots OR_n$ und $OS_1 \cdot OS_2 \ldots\ldots OS_n$ konstant für alle Lagen von O, wenn nur die Sekanten ihre Richtungen beibehalten (*Carnot*,

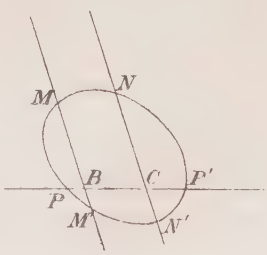

Fig. 7.

Chasles aufgestellter Satz. Nennt man nämlich a, b, c die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC und sind α, α'; β, β'; γ, γ' die von seinen Ecken an den Kegelschnitt gelegten Tangenten (Fig. 6), so besteht die Gleichung[128]):

$$(33) \quad \sin(a,\beta)\,.\,\sin(a,\beta')\,.\,\sin(c,\alpha)\,.\,\sin(c,\alpha')\,.\,\sin(b,\gamma)\,.\,\sin(b,\gamma') = \sin(c,\beta)\,.\,\sin(c,\beta')\,.\,\sin(a,\gamma)\,.\,\sin(a,\gamma')\,.\,\sin(b,\alpha)\,.\,\sin(b,\alpha'),$$

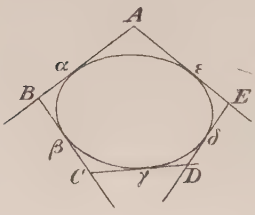

Fig. 8.

und wenn umgekehrt eine solche Relation für drei Geradenpaare stattfindet, sind diese Tangenten desselben Kegelschnitts. Mit Hülfe dieses und des *Carnot*'schen Theoremes zeigt *Chasles*, dass, wenn man die Punktepaare, in denen eine C_2 die Seiten eines Dreiecks schneidet, mit den Gegenecken verbindet, diese Verbindungslinien Tangenten eines zweiten Kegelschnitts sind[129]).

Für beliebige einem Kegelschnitt k *umschriebene* Polygone beweist *Carnot*[130]) eine Relation, die z. B. für den Fall eines Fünfecks (Fig. 8) lauten würde:

$$(34) \quad A\alpha\,.\,B\beta\,.\,C\gamma\,.\,D\delta\,.\,E\varepsilon = A\varepsilon\,.\,E\delta\,.\,D\gamma\,.\,C\beta\,.\,B\alpha,$$

wenn α, β, γ, δ, ε die Berührungspunkte der Seiten bezeichnen.

24. Veränderliche eingeschriebene Polygone. Dem schon (Nr. 18) erwähnten *Braikenridge-Maclaurin*'schen Satze entspricht dual ein zuerst von *Poncelet* bewiesener Satz: Bewegen sich die n Ecken eines veränderlichen n-Ecks auf n festen Geraden, während sich seine Seiten mit Ausnahme einer einzigen um feste Punkte drehen, so umhüllen die übrigen Verbindungslinien der Ecken Kegelschnitte. Gehen die n festen Geraden durch denselben Punkt, so reduziert sich jeder der eben erwähnten Kegelschnitte auf einen Punkt. Andere spezielle

---

Géom. de pos. Nr. 376). Für C_2 war der Satz vielleicht auch *Apollonius* bekannt; jedenfalls war er ihm sehr nahe, er hätte ihn eigentlich nur noch aussprechen müssen (Buch 3, § 17, 19 und 22).

128) Sect. con. Nr. 29.

129) Ebenda Nr. 78; vgl. auch *Hesse*, J. f. Math. 65 (1865), p. 384 = Werke, p. 529. Ein anderer kurzer Beweis bei *W. F Meyer*, Ber. d. Deutsch. Math.-Ver. 9 (1900), p. 94; ebenda (p. 95) eine Erweiterung auf C_n, wobei an Stelle der 3 Punktepaare 3 Punkt-n-tupel treten und n gerade sein muss (nebst Erweiterungen auf den Raum). Dual entsprechend schneiden die von den Ecken eines Dreiecks an die C^2 gezogenen Tangenten die Gegenseiten in Punkten eines zweiten Kegelschnitts, und wenn die C^2 in ein Punktepaar ausartet, folgt der Satz von *Steiner*, dass die Verbindungslinien zweier Punkte mit den Ecken eines Dreiecks die Gegenseiten in Punktepaaren eines zweiten Kegelschnitts treffen (Ann. de math. 19 (1828), p. 3 = Werke 1, p. 184).

130) Géom. de pos. Nr. 381. Ebenda Nr. 391—395 weitere Sätze dieser Art.

Fälle entstehen, wenn von den Geraden, auf denen die Ecken eines veränderlichen Polygons fortrücken oder den Punkten, um die sich die Seiten drehen, mehrere zusammenfallen. Rücken z. B. die Ecken abwechselnd auf der einen oder anderen von zwei Geraden fort, während sich die Seiten, mit Ausnahme einer, um feste Punkte drehen, so dreht sich auch die noch freie Seite um einen festen Punkt[131]). *Poncelet* ersetzt nun das Geradenpaar des eben erwähnten Falles durch einen Kegelschnitt k und fragt, welche Kurve von einer Seite eines in k eingeschriebenen n-Ecks umhüllt wird, wenn sich dessen $n-1$ übrige Seiten um feste Punkte drehen. Es zeigt sich, dass diese freie Seite und ebenso jede Diagonale je einen Kegelschnitt umhüllt, der k doppelt berührt (reell oder imaginär), und zwar lässt sich der Beweis dieses Satzes zurückführen entweder auf den Beweis für $n = 3$ oder für $n = 4$. Besondere Beachtung verdient der Fall, dass die $n-1$ festen Punkte einer und derselben Geraden g angehören. Werden hier die aufeinander folgenden Ecken numeriert, mit 1 beginnend, so werden von den Verbindungslinien gleichartig (beide gerade oder ungerade) numerierter Ecken und für ungerades n auch von der freien Seite Kegelschnitte umhüllt, die den gegebenen in seinen Schnittpunkten mit g berühren; die Verbindungslinien ungleichartig numerierter Ecken und für gerades n auch die freie Seite drehen sich hingegen um feste auf g gelegene Punkte.

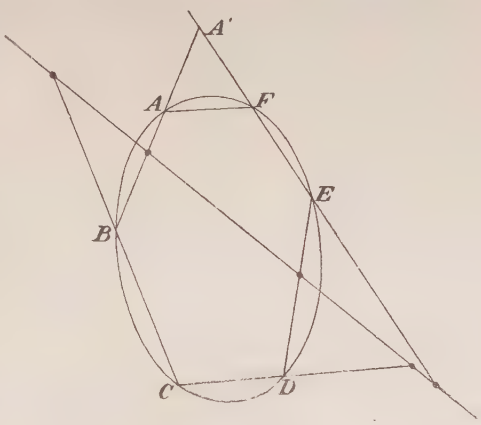

Fig. 9.

Es zeigt sich ferner, dass die Schnittpunkte von Verbindungslinien der letztgenannten Art oder auch z. B. der Schnittpunkt A' zweier Seiten AB und EF (Fig. 9) bei der Bewegung des Polygons je einen Kegelschnitt beschreiben, der durch die festen Drehpunkte der betreffenden Verbindungslinien oder Seiten geht. Für das neu entstandene Polygon $A'BCDEA'$ folgt daher sofort der zuerst von *Brianchon*[132]) bewiesene Satz: Liegen die Ecken eines veränderlichen Polygons mit Ausnahme einer einzigen auf einem gegebenen Kegelschnitt, während sich alle Seiten um Punkte einer und derselben

131) Traité, Nr. 502—509.

132) J. éc. polyt. 4, cah. 10 (1810), p. 1—6.

Geraden drehen, so beschreibt die freie Ecke einen Kegelschnitt, der durch die Drehpunkte der dieser Ecke zugehörigen Seiten geht. Natürlich gelten auch dual entsprechende Sätze.

Poncelet hatte, wie das Vorhergehende zeigt, einmal die Geraden, auf denen die Ecken eines veränderlichen Polygons fortrücken, durch einen einzigen dem Polygon umschriebenen Kegelschnitt ersetzt, das andere Mal die Punkte, um die sich die Seiten drehen, durch einen dem Polygon eingeschriebenen Kegelschnitt. Er ging aber noch einen Schritt weiter, indem er die Ecken eines veränderlichen n-Ecks auf einen Kegelschnitt k legte, während die Seiten, eine ausgenommen, je einen von $n-1$ Kegelschnitten $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ berühren, die sämtlich mit k dieselben Schnittpunkte gemeinsam haben (mit k demselben Büschel angehören, vgl. Nr. **46**); bei der Bewegung des Polygons umhüllen dann die freie Seite sowie alle Diagonalen des Polygons Kegelschnitte mit gemeinsamen Schnittpunkten[133]).

25. Konstruktion gewisser eingeschriebener Polygone. Mit Hülfe des *Braikenridge-Maclaurin*'schen Satzes löste *Servois*[134]) die Aufgabe, ein Polygon zu konstruieren, dessen n Ecken auf den Seiten eines gegebenen Polygons π liegen, während seine Seiten in vorgeschriebener Reihenfolge durch n gegebene Punkte gehen. Befreit man nämlich eine Ecke A des gesuchten Polygons von dem Zwange auf einer Seite a von π liegen zu müssen, so würde diese Ecke nach dem genannten Satze eine C_2 beschreiben, die die Gerade a in zwei Punkten trifft, deren jeder zu einer Lösung der Aufgabe führt. Die Lösung wird linear, wenn die gegebenen Punkte einer und derselben Geraden angehören oder die Seiten von π durch einen und denselben Punkt gehen.

Wird das Polygon π durch einen Kegelschnitt ersetzt, so kommt man zu der Aufgabe, einem gegebenen Kegelschnitt k ein n-Eck einzuschreiben, dessen Seiten in vorgeschriebener Reihenfolge durch n feste Punkte gehen sollen[135]). Diese Aufgabe hat im allgemeinen

---

133) Den Beweis dieses Satzes führt *Poncelet* zurück auf den Beweis im Falle $n = 3$, wobei noch k, k_1 und k_2 Kreise mit gemeinsamen Schnittpunkten sind. Vgl. für die oben erwähnten Sätze *Poncelet,* Traité, Nr. 493—536. Den Fall, dass $n = 3$, k ein beliebiger Kegelschnitt, k_1 und k_2 Kurven der m^{ten} bezw. n^{ten} Klasse sind, behandelt *Cayley,* Quart. J. 1 (1856), p. 344—354 = Coll. papers 3, p. 67—75. Vgl. ferner *Poncelet* a. a. O. Nr. 431—439, sowie *Cayley,* Quart. J. 2 (1856), p. 31—38 = Coll. papers 3, p. 80—85.

134) Ann. de math. 2 (1811), p. 116 f.; ebenda behandelt p. 115 *S. L'Huilier* den Fall $n = 3$.

135) Für den Fall, dass k ein *Kreis,* $n = 3$ ist und die 3 Punkte einer Geraden angehören, hat schon *Pappus* (Collect. Buch. 7, prop. 117 = Ausg. von

zwei — bei nicht vorgeschriebener Seitenfolge $(n-1)!$ — Lösungen, die sich auf einen in Nr. 24 erwähnten *Poncelet*'schen Satz gründen; jeder der dort auftretenden Berührungspunkte des Kegelschnitts k mit dem von der freien Seite umhüllten Kegelschnitt kann als Anfangsecke des gesuchten Polygons gewählt werden. Zur Konstruktion dieser Punkte schlägt *Poncelet*[136]) zwei Wege ein, einen indirekten und einen direkten; der letztgenannte besteht darin, dass man k drei verschiedene Polygonzüge einschreibt, deren Seiten durch die n Punkte gehen, sich aber im allgemeinen nicht schliessen werden. Aus den auf k gelegenen Anfängen A, A', A'' und Enden Q, Q', Q'' der Linienzüge bildet nun *Poncelet* die Punktepaare A, Q; A', Q'; A'', Q'' und fasst diese als Gegenecken eines in k eingeschriebenen Sechsecks auf; die zuge-

Hultsch, Bd. 2, Berlin 1877, p. 849 f.) eine Lösung gegeben, bei beliebiger Lage der 3 Punkte *S. de Castillon* (Berl. Nouv. mém., année 1776, p. 269—283), dem *G. Cramer* die Aufgabe 1742 vorgelegt hatte. Ebenda findet man p. 284—287 eine rein algebraische Lösung von *Lagrange*, die *Carnot* vereinfacht und mit Beibehaltung des Kreises auf beliebiges n ausgedehnt hat (Géom. de pos. Nr. 330). Auch *L. Euler* hat für den Kreis und $n = 3$ eine Lösung gegeben (Acta Petrop. Jahrg. 1780, Teil 1, p. 95 f.), ebenso *N. Fuss*, ebenda, p. 97—104. *A. J. Lexell*, (ebenda, Teil 2, p. 70—90) leitete aus der analytischen Lösung von *Lagrange* eine Konstruktion ab und fügte eine andere analytische Lösung hinzu. *Th. Clausen*, J. f. Math. 4 (1828), p. 391—394, behandelte den Fall, dass die 3 Punkte die Ecken eines dem Kreis umschriebenen Dreiseits bilden und zeigte, wie sich das eingeschriebene Dreieck berechnen lässt, dessen Seiten durch die Ecken des umschriebenen gehen, und umgekehrt; *Möbius* leistete mit Hilfe des baryc. Calculs dasselbe für Dreieck und beliebigen Kegelschnitt (J f. Math. 5 (1830), p. 102—106 = Werke 1, p. 481—488). Vgl. auch *Cayley*, Quart. J. 3 (1860), p. 157—164 = Coll. papers 4, p. 435—441. Eine analytische Lösung bei Kreis und beliebigem n hatte vor *Carnot* schon *L'Huilier*, Berl. Mém., Jahrg. 1796, p. 94—112 gegeben, während die erste geometrische aber etwas komplizierte Lösung dieses Falles von *A. Giordano di Ottaiano*, Soc. Ital. Mem. mat. e fis. 4 (1788), p. 4—17 herrührt, und unabhängig von diesem gelangte *G. F. Malfatti* (ebenda, p. 201—205) zur gleichen Lösung. *Brianchon* erledigte den Fall eines beliebigen Kegelschnitts, aber noch unter der Annahme, dass die n festen Punkte einer Geraden angehören (J. éc. polyt. 4, cah. 10 (1810), p. 4); er benutzte hierbei seinen in Nr. 24 erwähnten Satz. Für $n = 3$, beliebige Lage der 3 Punkte und beliebigen Kegelschnitt erwähnt *Gergonne*, Ann. de math. 1 (1811), p. 341, dass die Lösung dual aus der von *Servois*[137]) gegebenen Lösung der dualen Aufgabe folge. Vgl. auch die math.-hist. Studie von *M. Brückner*, „Das Ottaiano'sche Problem", Progr. Zwickau 1892, sowie *Kötter*, Bericht, p. 143—148.

136) Ann. de math. 8 (1817), p. 148 ff.; Traité, Nr. 558—560. Vgl. auch *A. Göpel*, J. f. Math. 36 (1844), p. 345 f. *Steiner* löste obige und die dual entsprechende Aufgabe für den Fall, dass k durch 5 Punkte bezw. 5 Tangenten gegeben ist, mit Hülfe eines Lineals und eines festen Kreises („Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises". Berlin 1833, p. 105 ff. = Werke 1, p. 519 f. = Ostw. Klass. Nr. 60, p. 76 f.).

hörige *Pascal*'sche Gerade schneidet dann aus k die zwei gesuchten Punkte heraus. *F. Seydewitz* verallgemeinerte die Aufgabe, indem er die n festen Punkte durch n Kegelschnitte ersetzte, die k doppelt berühren[137]).

26. Schliessungssatz von Poncelet. Auch mit der Aufgabe, einem gegebenen Kegelschnitt k_1 ein n-Eck einzuschreiben, dessen n Seiten einem anderen gegebenen Kegelschnitt k_2 umschrieben sind, hat sich *Poncelet* beschäftigt[138]). Er gelangt zu folgendem Resultat: Schreibt man k_1 einen Polygonzug ein, dessen Seiten k_2 berühren, und schliesst sich dieser Polygonzug nicht, so hat die Aufgabe keine Lösung; schliesst er sich aber, so giebt es unendlich viele Lösungen, indem sich alsdann mit jedem Punkt von k_1 als Anfangspunkt ein geschlossenes n-Eck konstruieren lässt. Der Beweis gründet sich darauf, dass, wenn man ein solches „*Poncelet*'sches Polygon" als vorhanden annimmt und nun dessen letzte Seite frei macht, diese einen Kegelschnitt umhüllt, der mit k_1 und k_2 gemeinsame Schnittpunkte hat, hier speziell mit k_2 zusammenfällt (vgl. Nr. **24**, wenn man die dort mit $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ bezeichneten Kurven zusammenfallen lässt).

---

137) Arch. Math. Phys. 4 (1844), p. 421—430. Die Aufgabe, einem Kegelschnitt ein n-Seit zu umschreiben, dessen Ecken in vorgeschriebener Folge auf n gegebenen Geraden liegen, behandelte *Poncelet* in Ann. de math. 8 (1817), p. 150 f.; Traité, Nr. 561; *Seydewitz* a. a. O. Für den Fall eines Kreises und $n = 3$ stellte *Gergonne*, Ann. de math. 1 (1810), p. 17 die Aufgabe, und *d'Encontre* wies ebenda, p. 122 ff. darauf hin, dass sich die Lösung aus der bekannten[135]) der dual entsprechenden Aufgabe ableiten lasse. Eine andere, nur das Lineal erfordernde Lösung gab *Gergonne*, ebenda, p. 126 f.; *Servois* (ebenda (1811), p. 337—341) und *Rochat* (ebenda p. 342) dehnten dieselbe auf den Fall eines beliebigen Kegelschnitts — aber noch $n = 3$ — aus. Vgl. auch *Gergonne*, Ann. de math. 7 (1817), p. 325—334, ferner *Kötter*'s Bericht, p. 148 f. Den Fall, dass die n Geraden durch einen und denselben Punkt gehen oder bei der oben betrachteten Aufgabe die n Punkte einer Geraden angehören, behandelt *Poncelet* in den Ann. de math. 8 (1817), p. 151 f. und im Traité, Nr. 563 f. *Göpel* löst a. a. O. [136]) p. 338 f. die Aufgabe, ein n-Eck zu konstruieren, dessen Ecken in vorgeschriebener Reihenfolge auf beliebig gegebenen Geraden oder Kegelschnitten liegen und dessen Seiten durch n gegebene Punkte gehen, von welchen diejenigen, deren zugehörige Seiten einen ihrer Endpunkte auf einem Kegelschnitt haben, auf diesem Kegelschnitt liegen; diejenigen aber, deren zugehörige Seiten beide Endpunkte auf verschiedenen Kegelschnitten haben, auf einem Schnittpunkt dieser beiden Kurven liegen. Noch andere Aufgaben dieser Art werden von *Göpel* in der zitierten Arbeit behandelt.

138) Traité, Nr. 565—567. Er erwähnte die Aufgabe schon Ann. de math. 8 (1817), p. 154. Analytische Beweise vieler oben in Nr. **24**—**26** behandelten Sätze gab *Poncelet* in seinen „Applications d'analyse et de géom." 1, Paris 1862, cah. 6. Vgl. auch *N. Trudi*, Giorn. di mat. 1 (1863), p. 81—90, 125 f.

Poncelet zeigt überdies, dass, wenn es Polygone der geforderten Art giebt, die Verbindungslinien ihrer Gegenecken durch einen und denselben Punkt gehen, der bei Änderung der Polygone ungeändert bleibt; er ist Doppelpunkt eines der drei Geradenpaare, die man (Nr. **46**) durch die Schnittpunkte von k_1 und k_2 legen kann.

Den Fall zweier Kreise behandelt *M. Weill*[139]), indem er den im allgemeinen offenen Polygonzug $abc\ldots$ betrachtete, welcher durch die Verbindungslinien der auf k_2 gelegenen aufeinander folgenden Berührungspunkte gebildet wird und bewies, dass das Centrum H der mittleren Entfernungen [III A 2] von $m < n$ einander folgenden Ecken dieses Zuges einen Kreis h beschreibt, wenn sich der dem Kreis k_1 eingeschriebene Zug $ABC\ldots$ fortbewegt; schliesst sich jedoch der Zug $abc\ldots$, so bleibt er bei Änderung von $ABC\ldots$ geschlossen, der Kreis h reduziert sich auf einen Punkt, H bleibt fest. *Weill* berechnet nun den Radius ϱ_m von h und gewinnt aus $\varrho_m = 0$ die Bedingung für Schliessung des m-Ecks[140]).

139) J. de math. (3) 4 (1878), p. 265—304. Für den Fall zweier Kreise k_1, k_2 und $n = 3$ hat schon *W. Chapple* die Relation $R^2 - d^2 = 2rR$ angegeben, die zwischen ihren Radien R, r und dem Abstand d ihrer Mittelpunkte stattfindet, wenn *Poncelet*'sche Dreiecke existieren (nach Angabe von *Cantor*, Gesch. d. Math. 3, p. 533 f., in den etwa 1746 erschienenen „Miscellanea curiosa mathematica"). Gewöhnlich wird die Formel *Euler* zugeschrieben, der Novi Comment. Petrop. 11 (1765), p. 114 die Relation $d^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16\Delta^2} - \frac{abc}{a+b+c}$ hat; aber vorher erwähnt sie *J. Landen*, „Mathematical lucubrations", London 1755, p. 5 als spez. Fall einer allgemeineren Formel. *N. Fuss* stellte Nova Acta Petrop. 10 (1794), p. 121 ff. für 2 Kreise und $n = 4$ die analoge Beziehung auf, ebenso für $n = 5, 6, 7, 8$, glaubte aber sich auf solche Polygone beschränken zu müssen, die durch die Zentrale von k_1 und k_2 in zwei kongruente Hälften zerlegt werden (ebenda 13 (1798), p. 166—189). Auch *Steiner* hat für $n = 3, 4, 5, 6, 8$ diese Relationen gegeben J. f. Math. 2 (1827), p. 96 und 289 = Werke 1, p. 127 und 159, doch ist seine Formel für $n = 8$ unrichtig. Vgl. auch *J. Mention*, Petersb. Bull. 1 (1859), p. 15—29, 33 f.; (1860), p. 507—512.

140) Auch wird gezeigt, wie man mit Hülfe von Zirkel und Lineal aus einem *Poncelet*'schen p-Eck ein zwei anderen Kreisen ein- bezw. umschriebenes $2p$-Eck konstruieren kann; ferner wie man mit denselben Mitteln *Poncelet*'sche Polygone konstruieren kann, deren Seitenzahl gleich $3 \cdot 2^p$, $4 \cdot 2^p$, $5 \cdot 2^p$ oder $7 \cdot 2^p$ ist, u. a. m. In einem zweiten Teile seiner Arbeit beweist *Weill* noch mehrere metrische Sätze über *Poncelet*'sche Polygone bei zwei Kreisen (vgl. auch Nouv. ann. (2) 19 (1880), p. 57—59), und auch *Steiner*, J. f. Math. 55 (1858), p. 363—368 = Werke 2, p. 670—675 hat solche Sätze ausgesprochen, die von *K. Dörholt*, Diss. inaug. Münster 1884, § 7—13, und *A. Hartmann*, Diss. inaug. Zürich 1889, Abschn. 7 bewiesen wurden. Weitere interessante Resultate bei *J. Wolstenholme*, Quart. J. 10 (1870), p. 356—368; 11 (1871), p. 66 f.; *G. H. Halphen*, J. de math. (3) 5 (1879), p. 285—292; *Weill*, Nouv. ann. (2) 19 (1880), p. 253—261, 367—378, 442—450.

27. Zusammenhang des Schliessungsproblems mit den elliptischen Funktionen. Für den Fall zweier Kreise legte *C. G. J. Jacobi* diesen Zusammenhang dar[141]). Das Integral $u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}$, $0 < \varkappa^2 < 1$, liefert durch Umkehrung $\varphi = \operatorname{am} u$ (II B 3); man deutet nun $\psi = 2\varphi$ als Bogen auf einem Kreis k_1 ($x = R\cos\psi$, $y = R\sin\psi$) und denkt sich Punkte P_n dieses Kreises gezeichnet, die den Winkeln $\psi_n = 2\varphi_n = 2\operatorname{am}(w_0 + nt)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ entsprechen, unter t einen beliebigen reellen Winkel verstanden, der dem Intervall $0 < t < K$ angehören möge, wo $\frac{\pi}{2} = \operatorname{am} K$. Es zeigt sich alsdann, dass die Verbindungslinien irgend zweier aufeinander folgenden Punkte wie P_{n-1} und P_n einen und denselben Kreis k_2 berühren, dessen Mittelpunkt sich in $x = -\frac{R(1 - \operatorname{dn} t)}{1 + \operatorname{dn} t}$, $y = 0$ befindet, während sein Radius $r = \frac{2R \cdot \operatorname{cn} t}{1 + \operatorname{dn} t}$ ist. Auch kann man zeigen, dass k_2 ganz innerhalb k_1 liegt. Sind also $\varkappa^2$ und t gegeben, so lässt sich immer ein Polygonzug $\ldots P_{-1} P_0 P_1 \ldots$ bestimmen, dessen Ecken auf k_1 liegen, während seine Seiten einen Kreis k_2 berühren; auch umgekehrt giebt es, wie leicht zu zeigen, für jeden innerhalb k_1 gelegenen kleineren Kreis k_2 ein Wertepaar $\varkappa^2$, t. — Soll sich das Polygon nach Konstruktion von n Seiten schliessen, so muss P_n mit P_0 zusammenfallen, P_{n+1} mit P_1, u. s. w. Hierzu erweist sich als notwendig, dass t zu $2K$ in rationalem Verhältnis $m : n$ stehe, unter m und n Zahlen ohne gemeinsamen Faktor verstanden; alsdann ist $w_0 + nt = w_0 + m \cdot 2K$, und es fällt P_n mit P_0 zusammen, P_{n+1} mit P_1, u. s. w., man hat ein Polygon von n Seiten, das sich m-mal um den inneren Kreis k_2 windet. Gleichgültig ist hierbei die Wahl des Anfangswertes w_0, also des ersten Eckpunktes P_0, es giebt in Übereinstimmung mit *Poncelet*'s Hauptergebnis unendlich viele Polygone der gewünschten Art. Auf solche Weise hat *Jacobi* die zur Schliessung notwendige Bedingung mit der Teilung eines elliptischen Integrals in so viele gleiche Teile in Zusammenhang gesetzt, als die Seitenzahl des Polygons beträgt[142]).

141) J. f. Math. 3 (1828), p. 381—389 = Werke, hrsgg. von *C. W. Borchardt* 1, p. 285—293; ins Französische übersetzt von *O. Terquem* in J. de math. 10 (1845), p. 435—444; ein kurzes Referat in Nouv. ann. 4 (1845), p. 377—379. Wir folgen hier der Darstellung von *R. Fricke*, „Kurzgefasste Vorl. über versch. Gebiete d. höh. Math.“, Leipzig 1900, p. 285—289. Vgl. auch *Ch. Hermite*, Bull. sciences math. astr. 2 (1871), p. 21—23.

142) *F. S. Richelot* zeigte J. f. Math. 5 (1829), p. 250—253, ins Französische übersetzt von *Terquem*, J. de math. 11 (1846), p. 25 ff., wie man bei 2 Kreisen

Das allgemeine, sich auf zwei beliebige Kegelschnitte k_1, k_2 beziehende Schliessungsproblem hat *Cayley* vermittelst der Eigenschaften des elliptischen Integrals erster Gattung behandelt. Er erhielt die Bedingung des Schliessens ausgedrückt durch die Invarianten von k_1 und k_2.[143]) *Th. Moutard* wurde bei Beschäftigung mit demselben Gegenstand auf die von *Jacobi* eingeführten Funktionen Θ uud H geführt[144]). In wieder anderer Weise haben *J. Rosanes* und *M. Pasch* den Zusammenhang des Schliessungsproblems bei zwei Kegelschnitten mit der Addition der elliptischen Integrale dargethan. Insbesondere beachteten sie hierbei die verschiedenen Fälle, die bezüglich der Realität der Schnittpunkte und gemeinsamen Tangenten von k_1 und k_2 auftreten können, und gaben die aus den Invarianten von k_1 und k_2 zusammengesetzten Konstanten an, die an Stelle der im Falle zweier Kreise vorhandenen Konstanten R, r, d treten[145]).

---

aus der rationalen für das n-Eck gültigen Bedingung der Schliessung die für das $2n$-Eck sofort entnehmen kann. Ähnlich lässt sich, wenn n keine Primzahl ist, die einfachste rationale Bedingung der Schliessung aus den bei den Faktoren von n gültigen Bedingungen ableiten. Wie sich im Falle einer Primzahl die Bedingung aus den Gleichungen für die Teilung der elliptischen Funktionen entwickeln lässt, hat gleichfalls *Richelot*, J. f. Math. 38 (1848), p. 353—372 gezeigt.

143) Philos. Mag. 5 (1853), p. 281—284; 6 (1853), p. 99—102, p. 376 f. = Coll. papers 2, p. 53—56, 87—90, 91 f.; Lond. Trans. 151 (1861), p. 225—239 = Coll. papers 4, p. 292—308; Par. C. R. 55 (1862), p. 700 = Coll. papers. 5, p. 21 f. *Cayley* entwickelt die Quadratwurzel aus der Diskriminante von $\lambda g(x, x) + f(x, x)$, wo $g(x, x) = 0$, $f(x, x) = 0$ die Kurven k_1 bezw. k_2 darstellen, in eine Reihe nach Potenzen von λ und drückt die gewünschte Bedingung durch das Verschwinden von Determinanten aus, deren Elemente durch einige Koeffizienten dieser Reihe gebildet werden. Auf andere Weise bei *J. Wolstenholme*, London math. soc. Proc. 8 (1876), p. 136 ff. Für spezielle Fälle vgl. *Cayley*, Philos. Mag. 13 (1856), p. 19—30 = Coll. pap. 3, p. 229—241; ebenda 7 (1854), p. 339—345 = Coll. pap. 2, p. 138—144; *F. Brioschi*, Ann. mat. fis. 8 (1857), p. 119—124 = Opere 1, p. 257—261. Zusammenhang des Schliessungssatzes mit einer (2, 2)-Korrespondenz auf k_1 bei *Cayley*, Quart. J. 11 (1871), p. 83—91 = Coll. pap. 8, p. 14—21.

144) In *Poncelet*'s „Applications d'analyse et de géom." 1, Paris 1862, p. 535—560.

145) J. f. Math. 64 (1864), p. 126—166. Dieselben Autoren zeigen J. f. Math. 70 (1869), p. 169—173, dass das Schliessungsproblem rein algebraisch gefasst auf die Aufgabe hinauskommt: Zwei Grössen t_0, t_1 seien symmetrisch verbunden durch $f(t_0, t_1) \equiv a t_0^2 t_1^2 + 2b t_0 t_1 (t_0 + t_1) + c(t_0 + t_1)^2 + d t_0 t_1 + e(t_0 + t_1) + f = 0$; man denke sich nun t_1 ausgedrückt durch t_0, dann vermittelst $f(t_1, t_2) = 0$ die Grösse t_2 durch t_1, u. s. f. Dann ist z. B. t_n mit t_0 verbunden durch $f_{n-1}(t_0, t_n) \equiv a_{n-1} t_0^2 t_n^2 + 2 b_{n-1} t_0 t_n (t_0 + t_n) + \cdots + f_{n-1} = 0$, wo $a_{n-1}, b_{n-1}, \cdots, f_{n-1}$ ganze homogene Funktionen von $a, b, \cdots, f$ vom Grade

M. Simon behandelte das Schliessungsproblem, indem er die *Weierstrass*'sche Normalform des auftretenden elliptischen Integrals einführte; er giebt die aus den Invarianten von k_1 und k_2 zusammengesetzten Konstanten g_2, g_3 und $\wp(\alpha)$ an, wo $\alpha = \int_0^{-\Theta} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$, während Θ eine der genannten Invarianten bezeichnet (vgl. Nr. 86). Die Bedingung des Schliessens wird $\wp(n\alpha) = \infty$, und es handelt sich nun darum, $\wp(n\alpha)$ durch $\wp(\alpha)$ auszudrücken, also um die ganzzahlige Multiplikation der elliptischen Funktionen. Bei Einführung von σ-Funktionen wird $\wp(n\alpha) = \infty$ gleichbedeutend mit $r_n = \frac{\sigma(n\alpha)}{[\sigma(\alpha)]^{n^2}} = 0$ (II B 3); für diese r_n werden Rekursionsformeln entwickelt, ferner wird gezeigt, dass sich r_n durch r_3, $\wp'$ und $\wp''$ ganz und rational darstellen lässt, und wie r_{ab} mit r_a und r_b zusammenhängt[146]). Auch *S. Gundelfinger*[146]) gelangt bei Behandlung des Schliessungsproblems zu dem Integral $J_1 = \int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$, indem er zeigt, dass für $g(x, x) = 0$ und $f(x, x) = 0$ als Gleichungen von k_1 und k_2 das Problem abhängt von $J = \int \frac{\sum \pm (\alpha_1 x_2 \, dx_3)}{g(x, \alpha) \cdot \sqrt{f(x, x)}}$, wo α_1, α_2, α_3 willkürliche Grössen bedeuten, und nun zwei Substitutionen angiebt, deren jede auf einfache Weise J_1 in J überführt und überdies die Theorie der elliptischen Funktionen für die Bildung gewisser mit der Aufgabe verknüpften Kovarianten verwertet. Nach *G. Darboux* liefert jedes *Poncelet*'sche n-Eck eine Transformation n^{ter} Ordnung (II B 3) eines elliptischen Integrals in ein anderes, und umgekehrt[147]).

---

n^2 sind. Es wird nun gefordert, dass für gegebenes $n > 2$ die Grösse $t_n = t_0$ sei, $t_{n+1} = t_1$, allgemein $t_{n+h} = t_h$. Hierzu reicht eine von t_n unabhängige Bedingung $q_n = 0$ aus. Die Reihe schliesst sich entweder gar nicht, oder für jeden Wert von t_0.

146) *Simon,* Diss. inaug. Berlin 1867; J. f. Math. 81 (1875), p. 301—323, im wesentlichen ein Abdruck einer Programmschrift für das Lyceum in Strassburg (1875). Die im Integral α auftretende obere Grenze $-\Theta$ ist eine Invariante von $f(x, x)$ und $g(x, x)$ (Nr. 86). *Gundelfinger,* J. f. Math. 83 (1877), p. 171—174; Vorl., p. 422—426.

147) Par. C. R. 90 (1880), p. 85—87. Den Zusammenhang des Schliessungsproblems mit den elliptischen Funktionen behandeln noch *Chasles,* Géom. sup., chap. 35; *Poncelet,* „Applic. d'analyse et de géom." 1, Paris 1862, p. 485—488; *W. K. Clifford,* Lond. math. soc. Proc. 7 (1876), p. 29—38; 225—233 = Math. papers, p. 205—217; 218—228; *H. Durège,* „Theorie der ellipt. Funct.", 3. Aufl., Leipzig 1878, 10. Abschn.; *J. Griffiths,* Lond. math. soc. Proc. 14 (1882), p. 46 f.;

28. Weitere Arbeiten zum Schliessungstheorem. *A. Hurwitz* geht zum Beweis des Schliessungstheorems von dem Satze aus, dass, wenn bei einer Aufgabe, deren Lösungen durch die Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades bestimmt werden können, mehr als m Lösungen auftreten, sofort unendlich viele Lösungen existieren. Er fasst dieses Kriterium folgendermassen: Findet zwischen den Elementen einer einstufigen Mannigfaltigkeit eine algebraische Korrespondenz (m, n) [III C 10] statt und lassen sich bei dieser Korrespondenz mehr als $m + n$ Koincidenzen nachweisen, so hat die Korrespondenz unendlich viele solcher Elemente, und zwar ist jedes Element Koincidenzelement[148]).

Während es zu zwei beliebigen Kegelschnitten k_1, k_2 im allgemeinen kein *Poncelet*'sches n-Eck giebt, wird es in einem einstufigen System Kurven K_1 geben, denen sich ein n-Eck einschreiben lässt, das einem festen Kegelschnitt k_2 umschrieben ist. *Halphen* bestimmte die Zahl dieser Kurven K_1.[149])

G. Kohn[150]) zeigte, dass jedes *Poncelet*'sche Polygon von ungerader Seitenzahl sich selbst polar ist in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt k', und zwar ist jede Seite die Polare ihrer Gegenecke. Die Kurve k' ist dieselbe für alle *Poncelet*'schen Polygone, die denselben umschriebenen und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt besitzen, und hat mit diesen beiden ein gemeinsames Poldreieck. *Poncelet*'sche Polygone von gerader Seitenzahl werden durch eine harmonische Zentralkollineation (III A 6) in sich übergeführt, vermöge deren die Gegenseiten und ebenso die Gegenecken einander zugewiesen sind.

Bezüglich einer historischen Darstellung des ganzen Schliessungs-

---

A. Schumann, Zeitsch. Math. Phys. 29 (1884), p. 55—61; *G. H. Halphen,* „Traité des fonct. ellipt. et de leurs applic." 1, Paris 1886, p. 10—16; 2, Paris 1888, chap. 10; *G. Kunz,* Progr. Zwickau 1888.

148) Math. Ann. 15 (1878), p. 8—11. *Hurwitz* benutzt dasselbe Prinzip zum Beweis des Satzes von *Steiner:* Zwei Kreise m_1, m_2 seien gegeben, etwa m_1 innerhalb m_2; in den Raum zwischen m_1 und m_2 zeichne man Kreise $k_1, k_2, k_3, \ldots$, sodass jeder jene zwei und den direkt vorhergehenden berührt. Dann schliesst sich diese Reihe oder sie schliesst sich nicht; aber im ersten Falle kann der Ausgangskreis willkürlich gewählt werden (J. f. Math. 1 (1826), p. 254 ff. = Werke 1, p. 42—44 = Ostw. Klass. Nr. 123, p. 35—38; J. f. Math. 2 (1827), p. 96—98 = Werke 1, p. 127; ebenda 2 (1827), p. 192 = Werke 1, p. 135; Ann. de math. 18 (1828), p. 378 f. = Werke 1, p. 225 f.; Anhang zur Syst. Entw., Nr. 80 = Werke 1, p. 455 f. = Ostw. Klass. Nr. 83, p. 146). Vgl. auch *K. Schwering,* Zeitsch. Math. Phys. 24 (1879), p. 344; *Hurwitz,* Math. Ann. 19 (1881), p. 65.

149) Bull. soc. philomat. (7) 3 (1879), p. 17—19.

150) Wien. Ber. 100, Abt. II a (1890), p. 6—19; daselbst noch andere Sätze.

problems[151]) verweisen wir auf *G. Loria*, „I poligoni di Poncelet", Torino 1889; Nachtrag hierzu Bibl. math. Jahrg. 1889, p. 67—74.

29. Alte und neuere Definitionen der Brennpunkte. Schon zu Anfang dieses Artikels (Nr. 2—5) wurden bei gewissen elementaren Erzeugungsweisen die *Brennpunkte* der Kegelschnitte erwähnt. *Apollonius* gelangte zu ihnen in folgender Weise. Nachdem er bewiesen, dass auf den in den Endpunkten A_1', A_2' irgend eines Durchmessers gezogenen Tangenten durch die Tangente eines beliebigen Kurvenpunktes P Stücke $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$ abgeschnitten werden, deren Produkt gleich dem Quadrat des zur Richtung des Durchmessers konjugierten Halbmessers ist, suchte er auf der Hauptaxe A_1A_2 (Fig. 10) solche Punkte F_i für die der absolute Wert des Produkts $A_1F \cdot FA_2$ gleich dem Quadrat der halben Nebenaxe b^2 ist. Er fand zwei solche Punkte, F_1 und F_2, zum Mittelpunkt symmetrisch gelegen, bei der Ellipse zwischen A_1 und A_2, bei der Hyperbel auf der Verlängerung von A_1A_2. *Apollonius* zeigte ferner, dass die Verbindungslinien von B_1 mit F_1 und F_2 (Fig. 10) gegen B_1A_1 bezw. B_1B_2 unter gleichen Winkeln geneigt sind (analoges gilt für B_2F_1 und B_2F_2) ebenso wie die Verbindungslinien von P mit F_1 und F_2 gegen die Tangente t von P. Hierdurch ist die Identität von F_1, F_2 mit den Punkten erwiesen, die man heute als Brennpunkte bezeichnet (Nr. 3). Hauptsächlich mit Hülfe dieser Eigenschaft $\sphericalangle B_1PF_1 = \sphericalangle B_2PF_2$ gewinnt *Apollonius*

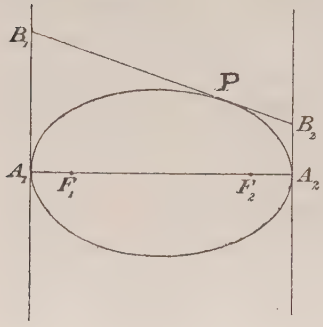

Fig. 10.

151) Von Litteratur zitieren wir noch: *Darboux*, „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébr.", Paris 1873, § 38, p. 99 ff. und Note 2, p. 183; *P. Serret*, Par. C. R. 53 (1861), p. 507 f.; *Em. Weyr*, J. f. Math. 72 (1870), p. 287; *D. Chelini*, Bologna Mem. (3) 5 (1874), p. 242 ff., 353—357; *H. Léauté*, Par. C. R. 79 (1874), p. 93—96, 602—606; *W. K. Clifford*, Lond. math. soc. Proc. 7 (1875), p. 34 = Math. papers, p. 212; *F. August*, Arch. Math. Phys. 59 (1875), p. 11—13; *E. Czuber*, Prag. Ber. Jahrg. 1875, p. 156; *J. Thomae*, Leipz. Ber. 47 (1895), p. 352—368; *K. Schober*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 91 ff.; *Humbert*, Par. soc. math. Bull. 27 (1899), p. 70 f. Was die Erweiterung des Schliessungsproblems auf den Raum angeht, so sei hier nur erwähnt, dass, wenn man als Analogon des Ordnungskegelschnitts eine kubische Raumkurve φ_3, dagegen als Analogon des Klassenkegelschnitts eine Fläche 2. Klasse Φ_2 ansieht, im allgemeinen stets ein und nur ein (im besonderen ∞^3) Tetraeder existiert, das φ_3 ein- und Φ_2 umbeschrieben ist, und entsprechend dualistisch: *W. Fr. Meyer*, Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883, p. 279 f.

den Satz von der konstanten Summe bezw. Differenz der Brennstrahlen (Nr. 2)[152]). Auch bemerkte er, dass wenn man von F_1 oder F_2 auf t ein Lot fällt, die Verbindungslinien seines Fusspunktes mit den Endpunkten der Hauptaxe zueinander rechtwinklig sind. Es liegen somit die Fusspunkte der von einem Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangenten der Kurve gefällten Lote auf einem Kreis (Scheitelkreis), der die Hauptaxe zum Durchmesser hat[153]).

152) Vgl. für obige Sätze *Apollonius*, Buch 3, § 45—52. Der Satz von der konstanten Summe bezw. Differenz der Brennstrahlen, der in vielen Schriften die Grundlage für die Theorie der Ellipse und Hyperbel bildet, lässt sich auch mit Hülfe des Theorems von dem konstanten Verhältnis der Abstände der Kurvenpunkte von Brennpunkt und Direktrix ableiten, wie dies z. B. *Th. Reye* (Geom. d. Lage, p. 170 f.) gethan hat. *Gundelfinger* (Vorl., p. 187—190) beweist ihn mit Hülfe eines zuerst von *Chasles* gefundenen Satzes, demzufolge die zwei Kurvenpunkten P_1, P_2 zugehörigen Brennstrahlenpaare Tangenten eines Kreises sind, der den Pol von P_1P_2 zum Mittelpunkt hat (*Chasles* in Bruxelles Nouv. mém. 6 (1830), p. 30; ins Englische übersetzt von *Ch. Graves*, „Two geometrical memoirs on the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics", Dublin 1841, p. 60). Bei *Plücker* („System d. Geom. des Raumes", Düsseldorf 1846, p. 266) ist dieser *Chasles*'sche Satz in einem anderen für F_2 gültigen als spezieller Fall enthalten; eine andere von *Chasles* gefundene Verallgemeinerung wird in Nr. **67** erwähnt. *Gundelfinger* beweist den Satz a. a. O. ausgehend von der Gleichung der C_2 in Linienkoordinaten. *J. Mention* (Pétersb. Bull. 16 (1857), p. 29—41) bezeichnet Kreise obiger Art als Fokalkreise und macht von ihnen mehrfach Anwendungen. — Mit Hülfe des Satzes, dass t den Winkel der Brennstrahlen PF_1, PF_2 halbiert, folgt ferner: Werden die von einem Brennpunkt F auf die Tangenten t des Kegelschnitts gefällten Lote um sich selbst verlängert, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen (Gegenpunkte von F mit Bezug auf t) auf einem Kreis, der den anderen Brennpunkt zum Mittelpunkt und die Länge der Hauptaxe zum Radius hat. Man erkennt dann sofort den Kegelschnitt als Ort aller Punkte, deren Abstände vom einen Brennpunkt und von dem um den anderen Brennpunkt beschriebenen eben erwähnten Kreis einander gleich sind (Fig. 2 und 4). Im Fall der Parabel geht der Kreis in die zu F_1 gehörige Direktrix über.

153) Auch dieser Satz war wohl *Apollonius* schon bekannt, wenn er sich auch in solcher Form ausgesprochen bei ihm nicht findet. Vgl. Buch 3, §§ 49 und 50. Der Satz wurde später von *C. Maclaurin* („Geometria organica", London 1720, p. 102) wiedergefunden und auf die Parabel ausgedehnt, bei der natürlich an Stelle des Kreises die Scheiteltangente tritt. *J. H. Lambert* (Lambert's Deutscher gelehrter Briefwechsel, Bd. 5, Teil 2, Berlin 1787, p. 326 f. (Brief an Oberreit, 1771)) und *M. R. de Prony* (J. éc. polyt. 4, cah. 10 (1810), p. 53) benutzten den Satz zu der nahe liegenden Konstruktion von Tangenten des Kegelschnitts. Eine Verallgemeinerung obigen Satzes folgt in Nr. **30**. Noch sei erwähnt, dass zwei beliebige Kegelschnittstangenten und die von den Brennpunkten auf sie gefällten Lote ein Sechsseit bilden, dem sich ein Kegelschnitt einschreiben lässt (*G. Gallucci* in Nouv. ann. (3) 17 (1898), p. 74 f., ebenda p. 548 f. auch von *P. H. Schoute* bewiesen).

Hiermit steht im engen Zusammenhange ein von *J. Keill*[154]) gefundener Satz, dass das Produkt der Abstände der beiden Brennpunkte von einer beliebigen Tangente oder auch das Produkt der Abstände eines Brennpunktes von zwei parallelen Tangenten gleich dem Quadrat der halben Nebenaxe ist.

Die neuere Geometrie gelangte in ganz anderer Weise zu den Brennpunkten. *Poncelet* fasste sie auf als Mittelpunkte solcher Strahlenbüschel, bei denen je zwei zum Kegelschnitt konjugierte Strahlen zueinander rechtwinklig sind, und umgekehrt. Er ging dabei von der durch *De la Hire* gefundenen Thatsache aus, dass bei jedem Kegelschnitt der Pol einer durch einen Brennpunkt F gezogenen Geraden g (Fokalsehne) der Schnittpunkt der durch F gezogenen Normale von g mit der Polare f von F ist[155]). Das zwischen Berührungspunkt und Schnitt mit f gelegene Stück einer Tangente wird daher von F unter rechtem Winkel gesehen. *Poncelet* bemerkte auch, dass man bei Bestimmung der Brennpunkte nach rein algebraischer, auf seine Definition sich stützender Methode zwei Paare solcher Punkte findet, ein reelles auf der Hauptaxe, ein imaginäres auf der Nebenaxe[156]). In Folge der polaren Beziehung zwischen f und F liegen die Scheitel der Axe harmonisch zu F und zum Schnittpunkt von f mit der Axe; ist d der Abstand der Geraden f vom Mittelpunkt der Kurve, so ist hiernach[157]) $\frac{d+a}{d-a} = \frac{a+c}{a-c}$ oder $d:a = a:c$, also f mit Rücksicht auf Nr. 4 die Direktrix. — Durch einen beliebigen Punkt der Ebene geht nur *ein* rechtwinkliges, zum Kegelschnitt k konjugiertes Geradenpaar. Man kann nun in einer Axe von k zu einem beliebigen Punkt P einen Punkt P_1 der Art zugehörig angeben, dass sich je zwei durch P und P_1 gehende konjugierte Geraden rechtwinklig schneiden. *Steiner* wies darauf hin, dass diese Punktepaare P, P_1 auf der Axe eine Involution (Fokalinvolution) bilden, deren Doppelpunkte die Brennpunkte sind. Im Fall imaginärer Doppelelemente sind die reellen Brennpunkte diejenigen Punkte der anderen Axe, von denen die Paare P, P_1 unter rechten Winkeln gesehen werden; hieraus folgt unmittelbar eine Konstruktion der Brennpunkte. Diese werden

154) Lond. Trans. Nr. 317 (1709), p. 147.

155) Sect. con. p. 189—192. Auch wird hier auf Grund obigen Satzes die Aufgabe gelöst: Direktrix und Hauptaxe eines Kegelschnitts zu konstruieren, von dem ein Brennpunkt und drei Kurvenpunkte gegeben sind. Eigentlich hat diese Aufgabe vier Lösungen, *De la Hire* beschränkt sich auf eine. Vgl. Fussnote 449.

156) Ann. de math. 8 (1818), p. 222.

157) *De la Hire,* Sect. con., p. 183.

überhaupt durch je zwei zueinander rechtwinklige konjugierte Geraden harmonisch getrennt[158]), so z. B. durch Tangente und Normale eines Kurvenpunktes; speziell bei der Parabel liegt der Brennpunkt natürlich in der Mitte des aus der Axe durch Tangente und Normale ausgeschnittenen Stückes[159]), die Fokalinvolution ist gleichseitig-hyperbolisch [III A 5, 6].

Zu der schon erwähnten *Poncelet*'schen Definition der Brennpunkte steht eine gleichfalls von *Poncelet* bemerkte Eigenschaft dieser Punkte in naher Beziehung. Er geht von zwei Kegelschnitten aus, denen ein Brennpunkt F gemeinsam ist. Die in Bezug auf beide Kurven genommenen Pole einer durch F gelegten Geraden g liegen alsdann auf der durch F gezogenen Normale von g; andererseits aber ist für den Schnittpunkt S eines zwei Kegelschnitten gemeinsamen Tangentenpaares charakteristisch, dass die Pole einer durch S gezogenen Geraden wieder mit S auf einer Geraden liegen (Nr. 57). Demgemäss ist auch F als Schnittpunkt eines den zwei Kurven gemeinsamen aber imaginären Tangentenpaares aufzufassen, oder als Zentrum einer zwischen diesen Kurven bestehenden kollinearen Beziehung, und dies gilt auch noch, wenn wir als den einen Kegelschnitt einen Kreis mit dem Mittelpunkt F wählen, ja dieser Kreis darf sich sogar auf seinen Mittelpunkt reduzieren[160]). Die Kenntnis von F ist daher gleichbedeutend mit der Kenntnis zweier Kurventangenten.

Bei Kurven 2. Klasse gelangt *Plücker* ähnlich wie *Poncelet* zu den Brennpunkten, indem er die Existenz von zwei reellen und zwei imaginären Punkten von solcher Beschaffenheit nachweist, dass die zwei von einem derselben an die Kurve gelegten imaginären Tangenten zu zwei beliebigen in dem Punkt sich rechtwinklig schneidenden Geraden harmonisch liegen. Diese imaginären Tangenten gehen daher durch die imaginären Kreispunkte I und J hindurch, oder anders ausgedrückt: Die Brennpunkte sind als Schnittpunkte der zwei von I und J an die Kurve gelegten Tangentenpaare anzusehen; die Berührungspunkte sind die imaginären Schnittpunkte der Kurve mit den

158) *Steiner-Schröter*, § 35. Auch folgt, dass die Brennpunkte und die Schnitte der Nebenaxe mit Tangente und Normale eines Kurvenpunktes auf einem Kreis liegen, woraus sich wieder eine Konstruktion der Brennpunkte ergiebt. Vgl. auch *Chasles*, „Aperçu historique", Bruxelles 1837, Note 31; deutsche Übertragung von *L. A. Sohncke*, Halle 1839, p. 413.

159) *De la Hire*, a. a. O., p. 177.

160) Traité, Nr. 453—457. Auch *Steiner* betrachtet den Brennpunkt als Zentrum eines den Kegelschnitt doppelt berührenden Kreises vom Radius Null (J. f. Math. 45 (1852), p. 195 = Werke 2, p. 453).

Direktricen. Später dehnte *Plücker* seine Definition der Brennpunkte auf beliebige algebraische Kurven aus; es kann dann jede durch einen solchen Punkt und einen der imaginären Kreispunkte gehende Gerade als Tangente der Kurve betrachtet werden[161]).

30. Weitere Brennpunktseigenschaften. Vermöge der Auffassung eines Brennpunktes F als Kollineationszentrums erhält *Poncelet* leicht die wichtigsten mit den Brennpunkten zusammenhängenden Eigenschaften der Kegelschnitte, so z. B. den Satz von der Konstanz des Abstandsverhältnisses eines Kurvenpunktes mit Bezug auf Brennpunkt und Direktrix[162]). Ferner zeigt er, dass die Verbindungslinie von F mit dem Pol Q einer Sehne den Winkel des von F nach den Endpunkten der Sehne gezogenen Geradenpaares halbiert[163]), ein Satz, der sich auch mit Hülfe eines anderen ableiten lässt, zufolge dessen der Winkel, unter dem von einem Brennpunkt aus das zwischen zwei festen Tangenten gelegene Stück einer beweglichen Tangente gesehen wird, konstant ist[164]). Speziell bei der Parabel ist dieser Winkel das Supplement des von den beiden Tangenten selbst gebildeten und der Kurve zugekehrten Winkels[165]), woraus sich sofort der zuerst von

---

161) Anal. Entw. 2, p. 61—64. *Plücker* bemerkt auch, dass bei rechtwinkl. Koord. mit Anfangspunkt im einen Brennpunkt die Gl. des Kegelschnitts in Linienkoordinaten dieselbe Gestalt hat wie die Gl. eines Kreises in rechtwinkl. Punktkoordinaten. Vgl. ferner *Plücker* in J. f. Math. 10 (1832), p. 84 f. = Ges. Abh. 1, p. 290 f.; System d. Geom., p. 102 f.; *Chasles,* Sect. con., p. 191. An *Plücker*'s Auffassung der Brennpunkte knüpfte *F. H. Siebeck*, J. f. Math. 64 (1864), p. 175 ff. an. In der Gl. einer Kurve in homogenen rechtwinkl. Linienkoordinaten $F(u, v, w) = 0$ setzt er $u : v : w = -1 : -i : (x + iy)$, betrachtet $F(-1, -i, x + iy)$ als monogene Funktion [II B 1 Nr. 2] von $z = x + iy$ und gewinnt so einen Zusammenhang mit der Algebra binärer Formen. Auf orthogonale Kurvensysteme wurde *Plücker*'s Definition der Brennpunkte durch *E. E. Kummer,* J. f. Math. 35 (1847), p. 11 f. angewandt.

162) Traité, Nr. 459. Vgl. auch Fussnote 18; ferner *J. Newton,* „Philosophiae naturalis principia mathematica", Buch 1, 4. Abschn., prop. 20 (1687) = deutsche Übers. von *J. Ph. Wolfers,* Berlin 1872, p. 83; *De l'Hospital,* Sect. con., p. 276—279; *Gergonne* bemerkt Ann. de math. 16 (1826), p. 368—372, dass das Abstandsverhältnis gleich der numerischen Exzentrizität ist; *Plücker,* Anal. Entw. 2, p. 129; *Chasles,* Sect. con., p. 182; *Salmon-Fiedler,* Kegelschn., p. 352; *Gundelfinger,* Vorl., p. 115—119; *Reye,* Geom. d. Lage, p. 170.

163) Traité, Nr. 461, übrigens schon bei *De la Hire,* Sect. con., Buch 8, prop. 24.

164) Ann. de math. 8 (1817), p. 5 f.; Traité, Nr. 464. Ein spezieller Fall des Satzes bei *Apollonius,* Buch 3, § 45. Das Stück der beweglichen Tangente wird durch deren Berührungspunkt und die Berührungssehne der festen Tangenten harmonisch geteilt (*O. Handel,* Progr. Reichenbach 1889, p. 7).

165) Ann. de math. 8 (1817), p. 5; Traité, Nr. 465.

J. H. Lambert[166]) gefundene Satz ergiebt, dass der einem Tangentendreieck der Parabel umschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Kurve geht, während andererseits die Brennpunkte aller einem und demselben Dreieck eingeschriebenen Parabeln auf dem Umkreis des Dreiecks liegen[167]). Hiermit steht in engstem Zusammenhange der Satz, dass die Fusspunkte der vom Brennpunkt einer Parabel nach allen ihren Tangenten unter demselben Winkel gezogenen Geraden auf einer und derselben Tangente der Kurve liegen[168]), und man wird nun leicht zu dem Theorem geführt: Werden von einem beliebigen Punkte des einem Dreieck umschriebenen Kreises nach den Seiten unter demselben übrigens beliebigen Winkel gerade Linien gezogen, so liegen deren Fusspunkte auf einer Geraden[169]). Im Falle eines Mittelpunktskegelschnitts erfüllen die Fusspunkte der von den Brennpunkten nach allen Tangenten unter einem beliebig gegebenen Winkel gezogenen Geraden nach *Poncelet* einen Kreis, der die Kurve in zwei Punkten berührt[170]) (Nr. **74**).

166) „Insigniores orbitae cometarum proprietates", Aug. Vind. 1761, p. 5 f. = Ostw. Klass. Nr. 133, p. 8 f.

167) *Poncelet*, Ann. de math. 8 (1817), p. 10 = „Appl. d'anal." 2, p. 462; Traité, Nr. 466. *A. F. Möbius* zeigte, dass das Tangentendreieck halb so gross ist als das durch die Berührungspunkte als Ecken gebildete (Baryc. Calcul p. 232 und 393 = Werke 1, p. 211 und 339); vgl. noch *D. F. Gregory*, Cambr. math. J. 2 (1839), p. 16 f. — Im Raume liegen die Brennpunkte aller einem Tetraeder eingeschriebenen Rotationsparaboloide nicht etwa auf der Umkugel des Tetraeders, sondern auf einer Fläche 3. Ordnung, die in den Tetraederecken Knotenpunkte besitzt; *W. Fr. Meyer*, Archiv Math. Phys. (3) 5, Doppelheft 1, 2, 1903.

168) *Poncelet* a. a. O.; Traité, Nr. 467; *Plücker*, System d. Geom., p. 111.

169) Ann. de math. 8 (1817), p. 10 f. = Appl. d'anal. 2, p. 462 f.; Traité, Nr. 468. Dieser Satz wird für den Fall eines *rechten* Winkels gewöhnlich *R. Simson* zugeschrieben, obgleich er bei *Simson* nirgends vorkommt; er findet sich vielmehr zuerst 1799 oder 1800 bei *W. Wallace* (vgl. *Cantor*, Gesch. d. Math. 3, p. 542 f., sowie *J. S. Mackay*, Edinb. math. soc. Proc. 9 (1891), p. 83—91). Hält man den Punkt des umschriebenen Kreises fest, ändert aber den Winkel, so umhüllen die zugehörigen *Wallace*'schen Geraden eine Parabel, die den festen Punkt zum Brennpunkt hat (*Steiner*, Ann. de math. 19 (1828), p. 45 f. = Werke 1, p. 197). Weitere Sätze über diese Gerade bei *S. Kantor*, Wien. Ber. 78 (1878), p. 193—203 und Math. Ann. 14 (1878), p. 323—330, sowie — überhaupt bez. der in diesem Art. erwähnten Dreieckssätze — bei *W. Fuhrmann*, „Synthetische Beweise planimetrischer Sätze", Berlin 1890, und *E. Rouché* et *Ch. de Comberousse*, Traité de géométrie 1, 2; 7. éd. Paris 1900.

170) Traité, Nr. 450; *Plücker*, Anal. Entw. 1, p. 217—219; *Chasles*, Sect. con., p. 186. Wie wohl *Plücker* schon bemerkte, aber *Steiner*, J. f. Math. 37 (1847), p. 177 = Werke 2, p. 406 zuerst aussprach, liegt der Mittelpunkt obigen Kreises auf der Nebenaxe; er bildet mit dem Pol der Berührungssehne ein zu den imaginären Brennpunkten harmonisch gelegenes Punktepaar (*Gundelfinger*, Vorl., p. 183). Für $\alpha = 90^0$ vgl. Nr. **29**.

Von weiteren Winkelrelationen, die *Poncelet* ableitete, erwähnen wir noch, dass die Verbindungslinien der Brennpunkte mit dem Schnittpunkt zweier Tangenten der Kurve gegen diese Tangenten unter demselben Winkel geneigt sind[171]). Diese Eigenschaft der Brennpunkte benutzt *Plücker* zu deren Definition bei Kurven 2. Ordnung[172]).

Gestützt auf die *Poncelet*'sche Auffassung eines Brennpunktes F als Zentrums einer kollinearen Beziehung, die zwischen dem Kegelschnitt und einem Kreis mit dem Mittelpunkt F stattfindet, beweist *Chasles* den Satz: Legt man durch einen Punkt P in der Ebene eines Kegelschnitts k beliebige Sekanten, die k in Punktepaaren wie S_1, S_2 treffen, so bilden die Brennstrahlen FS_1, FS_2 mit FP Winkel, für die $\operatorname{tg}\frac{S_1FP}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{S_2FP}{2}$ konstant ist; FS_1 und FS_2 sind somit Strahlenpaare einer Involution. Bei Ellipse und Parabel ist ferner die Summe der reziproken Abstände der Endpunkte einer Fokalsehne vom Brennpunkt konstant, bei Hyperbel die Summe oder Differenz, je nachdem die Sehne denselben oder die zwei verschiedenen Zweige der Kurve trifft[173]).

31. Gleichungen zur Bestimmung der Brennpunkte und Direktricen stellte bei beliebigen *Parallelkoordinaten Bret* auf, indem er

171) Traité, Nr. 478. Für den Fall, dass die eine der zwei Tangenten in einem Scheitel der Hauptaxe berührt, hat den Satz schon *Apollonius*, Buch 3, § 46, wie in Nr. **29** schon erwähnt.

172) Anal. Entw. **1**, p. 208.

173) J. de math. 2 (1837), p. 396 f.; Sect. con., p. 187 ff. Daselbst noch andere metrische Sätze über Fokalsehnen. Ferner seien noch folgende Theoreme von *Chasles* angeführt: Dreht man um einen Brennpunkt F eines Kegelschnitts k eine aus m Strahlen bestehende „Windrose", zieht man ferner in den m Schnittpunkten mit k die Tangenten und bildet die Quotienten aus den Abständen dieser Tangenten von einem festen Punkte und von F, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen dieser Quotienten $(n < m)$ eine Konstante. Bildet man ferner die Quotienten aus den Abständen jener m Schnittpunkte von einer festen Geraden und von F, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen dieser Quotienten $(n < m)$ konstant (J. de math. 3 (1838), p. 403). Andere Sätze dieser Art in Mém. de géométrie, Anhang zum „Aperçu historique", Paris 1875, p. 674. Viele solcher Sätze folgen leicht aus dem Theorem von *R. Leslie Ellis*: Ist $f(\varphi)$ eine rationale und ganze Funktion von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, so ist

$$f(\varphi)+f\left(\varphi+\frac{2\pi}{m}\right)+\cdots+f\left(\varphi+\frac{m-1}{m}2\pi\right)$$

unabhängig von φ, vorausgesetzt dass m grösser ist als der Grad der Funktion f (Cambr. math. J. 2 (1841), p. 272). Es folgt z. B. sehr leicht: Dreht man um den Mittelpunkt einer Ellipse eine aus m Strahlen bestehende Windrose, so ist die Summe der für die reziproken Werte der entstehenden Halbmesser gebildeten Quadrate konstant (bei *Ellis*, p. 275 f., für $m = 3$ bei *Chasles*, J. de math. 2 (1837), p. 405).

eine von *Euler* herrührende Bemerkung benutzte, dass bei einem Kegelschnitt, dessen Axen mit den Koordinatenaxen zusammenfallen, jeder Brennpunkt ein solcher Punkt ist, für den sich der Abstand von einem beliebigen Kurvenpunkt P als lineare Funktion der Abscisse von P darstellt[174]). *Plücker* erhielt die Koordinaten der Brennpunkte im Anschluss an die schon erwähnte[161]) Thatsache, dass bei rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung der Kurve 2. Klasse, deren einer Brennpunkt im Ursprung des Systems liegt, die Form einer Kreisgleichung in rechtwinkligen Punktkoordinaten hat[175]). *G. Dostor* deutete gewisse Gleichungen als Ausdrücke für Hyperbeln, die sich in den Brennpunkten des Kegelschnitts schneiden und sich auf Geraden reduzieren, falls dieser eine Parabel ist[176]). — Bei *Normalkoordinaten* benutzte *P. J. Hensley*[177]) den Satz, dass das Rechteck aus den von einem Brennpunkt auf zwei parallele Tangenten gefällten Loten konstant ist. *G. Salmon*[178]) bestimmt die Brennpunkte als Schnittpunkte der von den imaginären Kreispunkten an den Kegelschnitt k gelegten Tangentenpaare. *N. M. Ferrers* giebt Gleichungen für die Koordinaten der Brennpunkte unter Benutzung der Thatsache, dass die reziproke Polare von k in Bezug auf einen Kreis, der den einen Brennpunkt zum Mittelpunkt hat, wieder ein Kreis ist[179]). *E. d'Ovidio* legt die Definition der Brennpunkte als Zentren von Strahlenbüscheln zu Grunde, bei denen je zwei in Bezug auf k konjugierte Strahlen zu einander rechtwinklig sind. Auch giebt er Ausdrücke für die lineare und numerische *Exzentrizität* eines in allgemeiner Gleichung gegebenen Kegelschnitts, sowie für den einem beliebigen Durchmesser zugehörigen *Parameter*[180]).

174) *Euler*, „Introductio in analysin infinitorum", 2, Lausanne 1748, p. 63. *Bret*, Ann. de math. 8 (1818), p. 317—321 geht von einer auf beliebige Parallelkoordinaten bezogenen Kurvengleichung aus, oben erwähnter Abstand ist dann eine lineare Funktion der Koordinaten von P. 175) Anal. Entw., p. 63.

176) Arch. Math. Phys. 62 (1878), p. 289—293; 63 (1879), p. 137—140, 160—164 und 172—185; vgl. ferner *J. Wolstenholme*, London math. soc. Proc. 11 (1880), p. 102 f., *E. Humbert*, Nouv. ann. (3) 4 (1885), p. 138 f.; *E. Goursat*, ebenda (3) 6 (1887), p. 465 ff.

177) Quart. J. 5 (1861), p. 177 f.; ähnlich *H. M. Jeffery*, Quart. J. 8 (1867) p. 349, 360, 366. 178) Quart. J. 5 (1862), p. 307—309.

179) Tril. coord., p. 115 f. Die oben erwähnte Thatsache findet sich zuerst bei *De l'Hospital*, Sect. con., p. 275 f; *Poncelet* erkennt in seiner Théorie générale des polaires réciproques die Fruchtbarkeit des Satzes zur Ableitung zahlreicher metrischer Eigenschaften der Kegelschnitte, J. f. Math. 4 (1828), p. 48 = Traité, 2. Aufl. Paris 1866, Bd. 2, p. 100. Vgl. auch Nr. **19**.

180) Giorn. di mat. 6 (1868), p. 279—283; ebenda 7 (1869), p. 1—3 und 9—11; *G. Dostor*, Arch. Math. Phys. 63 (1879), p. 185 und 192 f. Zur Bestimmung

C. Normale und Krümmungskreis.

32. Normale eines Kegelschnittpunktes. Eine Konstruktion der Normale irgend eines Punktes P eines Kegelschnitts mit Hülfe der beiden Brennpunkte wurde schon in Nr. 3 erwähnt. Sind im Fall einer Ellipse nur die Axen und P gegeben, wobei die Koordinaten von P durch $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ mit der exzentrischen Anomalie und den Halbaxen zusammenhängen, so beschreibt man zur Konstruktion der Normale von P um den Mittelpunkt O der Kurve einen Kreis vom Radius $a + b$; der durch O unter dem Winkel t gegen die Hauptaxe gelegte Strahl trifft alsdann diesen Kreis in einem Punkt der Normale von P.[181]) Auf Grund eines Theoremes von *Frégier* lässt sich die Normale von P, wenn der Kegelschnitt gezeichnet vorliegt, lediglich unter Anwendung eines rechten Winkels konstruieren. Dieses Theorem lautet: Dreht sich ein rechter Winkel um seinen in P gelegenen Scheitel, so geht die Verbindungslinie der zwei anderen Schnittpunkte der Schenkel des Winkels und der Kurve durch einen Punkt Q der Normale von P.[182]) *Frégier* beweist den Satz analytisch mit Hülfe eines zweckmässig gewählten Koordinatensystems. Übrigens ist der Satz in einem weit allgemeineren enthalten, den für Flächen

---

der Brennpunkte und Direktricen sei ferner verwiesen auf *N. M. Ferrers,* Quart. J. 4 (1860), p. 235 f.; Tril. coord. p. 88; *W. H. Laverty,* Math. Quest. 10 (1868), p. 78 f.; *C. Smith*, Quart. J. 12 (1873), p. 240; *A. G. J. Eurenius,* Quart. J. 13 (1873), p. 198—207; *A. Letnikow,* Nouv. ann. (2) 20 (1881), p. 297—300; *J. Wolstenholme,* Lond. math. soc. Proc. 13 (1882), p. 188; *J. Koehler,* „Exercices de géom. anal. et de géom. supér." 1, Paris 1886, p. 166 f.; *Salmon-Fiedler,* Kegelschn., p. 692 f.; *F. X. Stoll,* Zeitsch. Math. Phys. 38 (1892), p. 283—292; *A. Tissot*, Nouv. ann. (3) 13 (1894), p. 97 f.; *Gundelfinger*, Vorl., p. 113—115, 168 f., 290, 342 und 346 f. Für den Parameter der Parabel vgl. Fussnote 82.

181) Vgl. z. B. *L. Paillotte* in Nouv. ann. (2) 8 (1869), p. 269.

182) Corresp. éc. polyt. 3 (1816), p. 394; Ann. de math. 6 (1816), p. 229—234. Hier wird das Theorem für F_2 erweitert, ferner der Satz bewiesen: Werden einer C_2 beliebig viele Dreiecke eingeschrieben, die P zur gemeinsamen Ecke haben, während der Winkel dieser Ecke durch die Normale von P halbiert wird, so gehen die Gegenseiten dieser Dreiecke sämtlich durch den Pol der Normale. *A. Cazamian* beweist das Theorem von *Frégier* durch Transformation mittelst reziproker Polaren aus dem Satz, dass die Scheitel aller einer Parabel umschriebenen rechten Winkel die Direktrix erfüllen (Nouv. ann. (3) 13 (1894), p. 322 ff.); auch wird gezeigt, dass P und der obige Punkt Q durch die Schnittpunkte der Normale PQ mit den Kurvenaxen harmonisch getrennt werden. Einen direkten analytischen Beweis giebt *Gundelfinger,* Vorl., p. 272 f. Vgl. ferner *J. B. Pomey*, Nouv. ann. (3) 4 (1885), p. 494—496; *B. Sporer*, Zeitschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 307—309; *O. Richter,* ebenda 35 (1889), p. 125 f.; *J. Mandl*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 117—123.

2. Ordnung *O. Hesse*[183]) beweist; für C_2 ausgesprochen würde er lauten: Legt man durch einen Punkt P des Kegelschnitts k Parallelen p_1, p_2 zu irgend einem Paar konjugierter Durchmesser eines anderen Kegelschnitts k', so schneidet jedes Paar p_1, p_2 die Kurve k in zwei weiteren Punkten, deren Verbindungslinien durch einen bestimmten Punkt Q gehen. Ist k' ein Kreis, so hat man das Theorem von *Frégier*. Für den Fall, dass P der Mittelpunkt des Kegelschnitts k' ist, hatte *Frégier* gleichfalls diese Verallgemeinerung seines ursprünglichen Satzes bewiesen. Q liegt dann auf dem konjugierten Durchmesser zu jenem Durchmesser von k', der k in P berührt[184]). Wählt man bei dem ursprünglichen Satze statt des rechten Winkels einen beliebigen Winkel α, so umhüllen nach *Poncelet* die bei Drehung des Winkels auf k markierten Sehnen einen Kegelschnitt, der k doppelt berührt und den bei $\alpha = 90^0$ auftretenden Punkt Q zum Pol der Berührungssehne hat[185]).

Sind T, T_1 und N, N_1 die Schnitte der Tangente und Normale eines Kegelschnittpunktes mit den Axen (Fig. 11), so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke TPN und N_1PT_1 die Gleichung $TP \cdot PT_1 = NP \cdot N_1P$ oder $tt_1 = nn_1$, wie wohl schon längst bekannt. Ausserdem ist dieses Produkt, wie *G. Dostor* zeigte, gleich $PF \,.\, PF_1$ oder rr_1; auch ist $n = \frac{b}{a}\sqrt{rr_1}$, $n_1 = \frac{a}{b}\sqrt{rr_1}$, unter

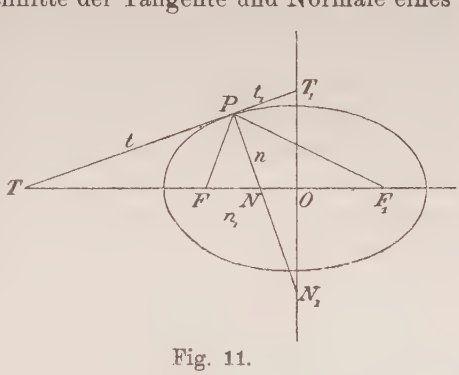

Fig. 11.

183) J. f. Math. 18 (1837), p. 110 = Werke, p. 11 f. Ersetzt man k' durch ein Kegelschnittbüschel (Nr. **46**), so erfüllen die Punkte Q eine Gerade; sie erfüllen eine C_2, wenn k' durch eine Kegelschnittschar (Nr. **56**) ersetzt wird (*Steiner-Schröter*, p. 250 f. und 275 f.; *Gundelfinger*, Vorl., p. 332 f.

184) Ann. de math. 7 (1816), p. 95 f.; vgl. auch ebenda 6 (1816), p. 321 ff.

185) Ann. de math. 8 (1817), p. 70 = Appl. d'anal. 2, p. 465; Traité Nr. 482; *Gundelfinger*, Vorl., p. 273. *Poncelet* zeigt auch a. a. O. und Traité, Nr. 491, dass wenn man bei $\alpha = 90^0$ den Scheitel in einen beliebigen Punkt S der Ebene verlegt, die obigen Sehnen einen Kegelschnitt umhüllen, der S zum einen Brennpunkt hat; derselbe wird ein Kreis, wenn S der Mittelpunkt von k ist (*Querret* und ein Anonymus in Ann. de math. 15 (1824), p. 197—201). Weitere hierher gehörige Sätze bei *O. Richter*, Zeitschr. Math. Phys. 36 (1890), p. 49—56; *K. Schober*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 89 ff. Der Satz des Textes ist ein spezieller Fall des andern, wonach die Geraden, die die Punktepaare einer auf dem Kegelschnitt k gegebenen Projektivität verbinden, einen Kegelschnitt umhüllen, der k doppelt berührt, nämlich in den Doppelpunkten der Projektivität [Nr. **70** und III A 5].

a und b die Längen der Halbaxen verstanden, daher $n : n_1 = b^2 : a^2$. Ferner findet man $t_1 \mp t = \frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t}$, wo links das obere Vorzeichen der Ellipse, das untere der Hyperbel entspricht. Schliessen zwei durch O gezogene Geraden einen Winkel ω ein und sind t', t_1', n', n_1' die auf den Tangenten resp. Normalen des Kurvenpunktes P von P bis zum Schnitt mit diesen Geraden gemessenen Abschnitte, so ist $\operatorname{tg}\omega = \frac{t' n_1' + n' t_1'}{n' n_1' - t' t_1'}$.[186]) Dass die Projektion der Normale PN auf einen Brennstrahl gleich dem Semiparameter ist, war schon *J. Keill* bekannt[187]).

Mit der Bestimmung der kleinsten Ellipsensehne, die in ihrem einen Endpunkt zur Kurve normal ist, beschäftigten sich *O. Bonnet, L. Paillotte, B. Niewenglowski, E. Lucas*[188]). Zahlreiche weitere Sätze über Normalen hat *M. Desboves* abgeleitet[189]).

33. Die von irgend einem Punkt P nach einem Kegelschnitt zu ziehenden Normalen behandelte schon *Apollonius.* Er betrachtete die von dem Punkte P zum Kegelschnitt k möglichen Maximal- und Minimallinien und erkannte, dass sie zugleich Normallinien von k sind; ziemlich eingehend untersuchte er, wie viele solcher Geraden sich von P aus ziehen lassen. Zur Konstruktion der Normalenfusspunkte benutzte er eine durch P und den Mittelpunkt von k gehende Hyperbel, deren Asymptoten zu den Axen von k parallel sind; sie schneidet aus k die gewünschten *vier* Fusspunkte aus (*Apollonische* Hyperbel)[190]). *De la Hire* behandelte die Normalenaufgabe, indem er

186) Nouv. ann. (2) 9 (1870), p. 549 f.; andere Beziehungen Arch. Math. Phys. 51 (1870), p. 139—190 und 61 (1877), p. 160—171. Das Produkt rr_1 ist nach *Dostor* auch gleich dem Produkt aus den Abständen der Normale von ihrem Pol und vom Kurvenmittelpunkt (Nouv. ann. (2) 9 (1870), p. 528; bewiesen von *C. Valentino,* Giorn. di mat. 9 (1871), p. 177 f.), nach *H. P. Hamilton* gleich dem Quadrat des zu OP konjugierten Halbmessers („An analytical system of conic sections", deutsch von *J. H. Benckendorff,* Berlin 1828, p. 93). Vgl. ferner *A. Transon,* Nouv. ann. (2) 7 (1868), p. 154 und (2) 12 (1873), p. 1—20.

187) Lond. Trans. 26 (1708), p. 177; vgl. auch Fussnote 230.

188) *Bonnet,* Nouv. ann. (1) 2 (1843), p. 420—425; *Paillotte,* ebenda (2) 7 (1868), p. 523; *Niewenglowski,* ebenda (2) 14 (1875), p. 270 f.; *Lucas,* ebenda (2) 15 (1876), p. 6 f.

189) „Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques", Paris 1861, p. 27—46.

190) Buch 5, besonders § 58—63. Vgl. ferner *K. Lauermann,* Wien. Ber. 83 (1880), p. 92 f.; *C. Schirek,* Zeitschr. Math. Phys. 29 (1883), p. 239 ff. Umgekehrt trifft jede gleichseitige Hyperbel, die durch den Mittelpunkt eines Kegelschnitts k geht und zu den Axen von k parallele Asymptoten hat, die Kurve k in 4 Punkten, deren Normalen sich in einem Punkte schneiden. Durch-

für die Abscissen der Normalenfusspunkte eine Gleichung 4. Grades aufstellte und mit Hülfe eines Kreises ihre Wurzeln konstruierte unter der Voraussetzung, dass k gezeichnet vorliegt [191]). Später verfährt er ähnlich wie *Apollonius* und betrachtet die Normalen als kürzeste oder längste Geraden, die sich von P an k ziehen lassen [192]). *A. M. Legendre* [193]) zeigte mit Hülfe von Untersuchungen der Realität der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades, dass man durch P vier, drei oder zwei Normalen an eine Ellipse ziehen kann, je nachdem P innerhalb, auf oder ausserhalb der Evolute (Nr. **40**) der Kurve liegt.

F. Joachimsthal gab bei seiner Behandlung des Normalenproblems zunächst eine einfache konstruktive Lösung der Aufgabe, zu zwei Ellipsenpunkten A, B zwei andere A_1, B_1 zu finden, deren Normalen sich mit denen von A, B in einem Punkte treffen. Je 3 der 4 Punkte, z. B. A, B, A_1 liegen mit dem Kurvenpunkte B_1', der B_1 diametral gegenüberliegt, auf einem Kreis [194]). Ferner giebt er die Konstruktion des Kreises durch die Fusspunkte der 3 von einem gegebenen Punkt einer Ellipsennormale noch möglichen Normalen [195]). Später zeigte er analytisch, dass, wenn man von einem Scheitel S

läuft P eine Gerade, so bilden die zu P gehörigen Apollonischen Hyperbeln ein Büschel (Nr. **46**), *Steiner*, J. f. Math. 49 (1854), p. 338 = Werke 2, p. 627. Vgl. noch I B 2, Nr. **24**, Fussn. 383[b]).

191) „La construction des équations analytiques", Paris 1679, Anhang zu „Nouveaux élémens des sections coniques", p. 440—452 der Ausgabe von 1701. Ähnlich *E. Catalan*, Nouv. ann. 7 (1848), p. 332—337, 396 f.

192) Sect. con., Buch 7.

193) „Traité des fonctions elliptiques", 1, Paris 1825, p. 348 f.; vgl. auch *G. Lamé*, „Examen des diff. méth.", Paris 1818, p. 115.

194) J. f. Math. 26 (1843), p. 172—178. Vgl. auch *Cayley*, J. f. Math. 56 (1857), p. 182—185 = Coll. papers 4, p. 74—77. Die Verbindungslinien eines der 4 Punkte A, B, A_1, B_1 mit den 3 anderen sind übrigens nach *E. Laguerre*, Par. soc. math. Bull. 5 (1877), p. 39 wieder Normalen eines Kegelschnitts, der dieselben Axen hat, wie der gegebene.

195) Vgl. auch *C. Pelz*, Wien. Ber. 85 (1882), p. 172 f. *F. E. Eckardt* hat die meisten von *Joachimsthal* a. a. O. gefundenen Sätze analytisch bewiesen (Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), p. 311—324), auch ihre für Hyperbel und Parabel nötigen Umformungen gegeben und weitere Sätze hinzugefügt. Für die Parabel hat wahrscheinlich *R. F. de Sluse* schon 1668 gefunden, dass ihr Scheitel S und die Fusspunkte der 3 von einem beliebigen Punkt P der Ebene auf die Kurve gefällten Normalen in einem Kreis liegen: eine Bemerkung von *Chasles*, J. de math. 3 (1838), p. 429, gestattet diese Vermutung. Umgekehrt trifft jeder durch S gehende Kreis die Parabel in 3 Punkten A, B, C, deren Normalen in einem Punkt zusammenlaufen. Weitere hierher gehörige Sätze bei *K. Zahradnik*, Prag. Böhm. Ber., Jahrg. 1879, p. 98—109. Gewisse metrische Relationen wurden gegeben von *Joachimsthal*, a. a. O., *Desboves*, a. a. O.[189]), p. 16, *E. Oekinghaus*, Arch. Math. Phys. (2) 6 (1888), p. 112.

eines Kegelschnitts k auf die 4 von einem beliebigen Punkt P nach k gezogenen Normalen Lote fällt, die Fusspunkte derselben auf einem Kreis c liegen[196]). Zieht man nun durch S nach dem durch P gezogenen Kegelschnittdurchmesser eine Senkrechte, die k noch in P' trifft, so ist die in P' gezogene Tangente die Schnittsehne von c mit dem Kreis c', der die durch S gehende Axe zum Durchmesser hat. Auf diese zwei Sätze gründet *Joachimsthal* folgende Konstruktion der vier Normalen: Man sucht P' und die Schnittpunkte E, E' der in P' gezogenen Tangente mit dem Kreis c'; alsdann beschreibt man einen durch E und E' gehenden Kreis c, dessen Mittelpunktsordinate durch eine Formel gegeben wird und besonders zu konstruieren ist. Trifft c den Kegelschnitt in L, L', L'', L''', so sind die von P auf die Sehnen SL, SL', SL'', SL''' gefällten Lote die zu P gehörigen Normalen[197]). *Joachimsthal*[198]) hat auch eine Parameterdarstellung für die Apollonische Hyperbel α gegeben, die Gleichung 4. Grades für die Parameter ihrer Schnittpunkte mit k aufgestellt und hierdurch Relationen gefunden, die zwischen nur drei oder den vier Parametern dieser Schnittpunkte bestehen.

Poncelet[199]) konstruiert die Hyperbel α, indem er von P auf alle Tangenten von k Lote fällt [III D 1, 2, Nr. 7]; die Schnittpunkte derselben mit den zu den Tangentenrichtungen konjugierten Durchmessern erfüllen die Kurve α. Nach *Chasles*[200]) geht α auch durch die Mitten der Sehnen, die von den um P konzentrisch gezogenen Kreisen durch ihre Schnitte mit k bestimmt werden. Ferner zieht *Chasles* statt der Lote Geraden, die gegen die Tangenten unter einem konstanten Winkel ϑ geneigt sind und erhält dann analog wie *Poncelet*

196) J. f. Math. 48 (1853), p. 377—380. Der Kreis c findet sich übrigens schon vorher bei *F. Padula,* „Raccolta di problemi di geometria", Napoli 1838, p. 91.

197) Das von P auf SL gefällte Lot schneidet k natürlich nur in dem Punkte rechtwinklig, dessen Tangente zu SL parallel ist. Störend ist bei obiger Konstruktion, dass die Mittelpunktsordinate von c berechnet und besonders konstruiert werden muss. *H. J. S. Smith* hat diesen Mangel beseitigt (Ann. di mat. (2) 3 (1869), p. 144 ff. = Coll. papers 2, p. 30). Vgl. ferner *L. Painvin,* Nouv. ann. (2) 9 (1870), p. 348—353; *J. A. Grunert,* Arch. Math. Phys. 43 (1865), p. 26—54; *E. Lucas,* Nouv. ann. (2) 15 (1876), p. 5 f. und (2) 19 (1880), p. 279 f.; *C. Pelz,* Prag. Böhm. Ber., Jahrg. 1895.

198) J. f. Math. 53 (1856), p. 149—152 und 169—170.

199) Traité, Nr. 492.

200) J. de math. 3 (1838), p. 410 f. und 428—430; Sect. con. p. 142 ff. *A. del Re* hat Giorn. di mat. 22 (1883), p. 75—86 diese Untersuchungen von *Chasles* weiter geführt.

einen Kegelschnitt, der aus k die Fusspunkte der Geraden ausschneidet, die von P gezogen die Kurve k unter dem Winkel ϑ schneiden.

Auch mit Hülfe einer Parabel lassen sich die vier von P aus möglichen Normalen konstruieren. *Chasles*[201]) erhält nämlich aus der Hyperbel α mittels Transformation durch reziproke Polaren eine Parabel p, deren mit k gemeinsame Tangenten diesen Kegelschnitt in den Fusspunkten der 4 aus P gefällten Normalen berühren. Für diese Parabel giebt er u. a. folgende Konstruktion: Man beschreibe um P konzentrische Kreise und lege durch die jeweiligen Schnittpunkte von k mit irgend einem der Kreise die Geradenpaare; die in Bezug auf k genommenen Polaren der einzelnen Doppelpunkte dieser Paare sind Tangenten der Parabel, deren Direktrix durch P geht. Später giebt *Chasles*[202]) noch folgenden Satz: Dreht sich eine Gerade g um einen festen Punkt P, so umhüllt der zu g rechtwinklige und in Bezug auf k konjugierte Strahl die Parabel p. Auch *Steiner*[203]) fand diese Parabel, bemerkte, dass sie die Axen von k berührt und dass umgekehrt jede Parabel, die die Axen von k berührt, mit k vier Tangenten gemeinsam hat, deren in den Berührungspunkten errichtete Normalen durch einen und denselben Punkt gehen; den Punkten P einer Geraden entspricht eine Schar (Nr. **56** und **63**) solcher Parabeln. Eine Parabel wird nach *Steiner* auch von den Normalen zweier beliebiger Punkte P_1, P_2 von k, ihrer Verbindungslinie und den beiden Axen berührt; beide Kurven werden identisch, wenn P_1 und P_2 in einen einzigen Punkt P von k zusammenrücken. Über die Verwendung dieser Kurve bei Konstruktion des alsdann zu P gehörigen Krümmungsmittelpunktes vgl. Nr. **36**; nach dem Vorgange von *C. Pelz* wird in diesem Falle die Kurve häufig als *Steinersche Parabel* bezeichnet[204]).

34. Weitere Untersuchungen zum Normalenproblem. *Cayley*[194]) hat auf eine Verallgemeinerung des Normalenproblems hingewiesen, die sich ergiebt, wenn man die imaginären Kreispunkte durch eine beliebige Kurve 2. Klasse k_0 ersetzt. An Stelle der im Punkte Q eines

201) J. de math. 3 (1838), p. 420 f.

202) Sect. con. p. 145 f. Der zu g konjugierte und gegen g unter einem Winkel ϑ geneigte Strahl umhüllt nach *Chasles* eine Parabel p' mit analogen Eigenschaften wie die zu $\vartheta = 90^0$ gehörige Parabel p.

203) J. f. Math. 49 (1854), p. 339 = Werke 2, p. 629. Über die Verwendung dieser Parabel bei Konstruktion der Axen eines durch gewisse Daten bestimmten Kegelschnitts vgl. *C. Pelz,* Wien. Ber. 73 (1876), p. 379—425.

204) *Steiner-Schröter,* p. 204; *Pelz,* Prag. Böhm. Ber., Jahrg. 1879, p. 205—246. Vgl. auch *C. Cranz,* „Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen 2. Ordnung", Stuttgart 1886, p. 19—28.

Kegelschnitts k gezogenen Normale tritt dann eine zur Tangente von Q in Bezug auf k_0 konjugierte Gerade (Quasi-Normale von Q in *Fiedler*'s [205]) Ausdrucksweise). An diese Auffassung knüpft *A. Clebsch* [206]) in seiner analytischen Behandlung des Normalenproblems an. Die Aufgabe wäre dahin zu formulieren, dass man auf k solche Punkte Q sucht, deren jeweilige Verbindungslinie mit P durch den in Bezug auf k_0 genommenen Pol der Tangente von Q geht; dabei darf man statt k_0 auch eine Kurve der durch k und k_0 bestimmten Schar (Nr. **56**) nehmen. *Clebsch* findet bei diesèr Gelegenheit, dass die Punkte, aus denen sich 4 Normalen von gegebenem Doppelverhältnis σ ziehen lassen, zwei C_6 erfüllen, und alle bei variabelem σ entstehenden C_6 haben dieselben Rückkehrpunkte [III C 2], von denen zwei im Unendlichen liegen, während die vier anderen zugleich Rückkehrpunkte der Evolute von k (Nr. **40**) sind. Auch die Rückkehrtangenten sind allen diesen Kurven gemeinsam und bestehen aus der unendlich fernen Geraden g_∞ und den Axen von k. [207]) Im Falle $\sigma = -1$ fallen beide C_6 in eine einzige zusammen, im Falle $\sigma = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$ reduziert sich der Ort auf einen sechsfachen Kegelschnitt; für $\sigma = 0$ erhält man die Evolute sowie doppelt zählend g_∞ und (auch doppelt) die Axen von k. [207])

Die Fusspunkte der von den einzelnen Punkten einer Geraden g nach k gezogenen Normalen bilden eine biquadratische Involution [III C 10], und die 6 Seiten des jeweiligen Vierecks der Grundpunkte umhüllen, wie *Em. Weyr* fand, eine C_6 der 3. Klasse, die die Axen von k und die Gerade g_∞ berührt [208]).

F. Laguerre [209]) hat das Normalenproblem mit der Invarianten-

---

205) Kegelschn., 1. Aufl., Leipzig 1860, p. 565 f.

206) J. f. Math. 62 (1862), p. 64—109; vgl. noch *Gundelfinger,* Vorl. (1895), p. 381 f. Auch *A. del Re,* Giorn. di mat. 22 (1883), p. 109—117 hat das Normalenproblem wesentlich verallgemeinert.

207) Eingehender hat *G. Bauer,* Münch. Ber. 8 (1878), p. 128—135 die obigen C_6 hinsichtlich ihrer Singularitäten untersucht. Sollen zwei der 4 Normalen zu einander rechtwinklig sein, so ist der Ort von P eine C_6, die in enger Beziehung zu dem Direktorkreis des Kegelschnitts steht: beide Kurven lassen sich rational und eindeutig ineinander transformieren (*J. Gysel,* Progr. Schaffhausen 1877, p. 1—8). — Auch *S. Roberts,* London math. soc. Proc. 9 (1877), p. 70 f. hat mehrere dieser Resultate abgeleitet (ebenso *Bauer,* a. a. O. p. 122 ff.) und einfache Relationen gefunden für die Winkel, die die von P gezogenen Normalen und der durch P gehende Durchmesser mit einer Axe von k bilden.

208) Zeitschr. Math. Phys. 16 (1871), p. 440—445. Vgl. ferner *F. Purser,* Quart. J. 8 (1866), p. 66 f.; *Pelz,* Wien. Ber. 85 (1882), p. 169—171.

209) Paris, C. R. 84 (1877), p. 181—183; Par. soc. math. Bull. 5 (1877), p. 30—43. *Laguerre* geht bei diesen Untersuchungen aus von einem Satze von *J. Liouville,*

theorie binärer Formen in Verbindung gebracht. Er denkt sich die durch $y : x$ ausdrückbaren Richtungen der vier von P aus möglichen Normalen gegeben als Wurzeln der Gleichung $U \equiv ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = 0$; ferner bestimme $u \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$ die Richtungen irgend zweier der 3 Geraden, die aus den Axen von k und aus dem durch P gehenden Durchmesser bestehen. Alsdann sind die Richtungen der 4 Verbindungslinien von P mit den Mittelpunkten der 4 Kreise, die sich durch die 4 Tripel der Normalenfusspunkte legen lassen, gegeben durch eine der 2 Gleichungen $H \pm U\sqrt{\frac{S}{3}} = 0$, unter S die Invariante 2. Grades, unter H die *Hesse*'sche Kovariante von U [I B 2, Nr. 2; Nr. 8, Fussn. 169] verstanden. Ferner giebt er eine Relation an, die zwischen den Invarianten S, T von U und der Diskriminante von u besteht, sowie die Bedingung, dass 3 durch P gehende Geraden Normalen eines Kegelschnitts seien, der 2 gegebene Geraden zu Axen hat.

Ist eine Ellipse E gegeben durch $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, so besteht für die Parameter α, β, γ dreier Punkte, deren Normalen in einem Punkte P zusammenlaufen, nach *W. S. Burnside*[210]) die Relation $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = 0$, und *C. F. Gauss* bemerkte, dass für die Parameter α, β, γ, δ der vier zu P gehörigen Normalenfusspunkte die Beziehung stattfindet $\alpha+\beta+\gamma+\delta = (2n+1)\pi$, oder nach *Desboves* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = -1$, und wenn umgekehrt diese Beziehungen gelten, gehören die Normalen der Punkte

---

J. de math. 6 (1841), p. 403 f.: Zieht man in den Schnittpunkten eines Kreises und einer algebraischen Kurve c die Normalen an c und verlängert sie bis zum Schnitt mit einer durch den Kreismittelpunkt M gezogenen Transversale t, so ist die Summe der reziproken Werte der von M bis zu diesen auf t gelegenen Schnittpunkten gemessenen Segmente gleich Null. Auch die Frage nach den Kegelschnitten, die 4 durch einen Punkt P gehende Geraden rechtwinklig schneiden, hat *Laguerre* vom Standpunkt der Invariantentheorie behandelt und gefunden, dass es — abgesehen von den Kreisen mit dem Mittelpunkt P — unendlich viele Kegelschnitte der gewünschten Art giebt; ihre Mittelpunkte liegen auf 4 Geraden, die sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. *Laguerre* giebt ferner die Konstruktion des durch seine Axen und zwei Normalen bestimmten Kegelschnitts.

210) *K. Lauermann*, Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), p. 388 erwähnt, dass diese Relation von *W. S. Burnside* herrührt. Er leitet auch eine Normalenkonstruktion ab aus der Formel $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi$ und aus der Beziehung $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1 = 2n\cdot\pi$, die nach *Joachimsthal* (J. f. Math. 36 (1847), p. 96) zwischen den Parametern von 4 aus E durch einen Kreis ausgeschnittenen Punkten besteht (*Lauermann*, Zeitschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 52—57).

einem und demselben Strahlenbüschel an[211]). Bei der Parabel $x = a\lambda^2$, $y = 2a\lambda$ erfüllen die Parameter der zu P gehörigen Normalenfusspunkte die Gleichung $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.[212])

35. Besondere einfache Fälle des Normalenproblems. Für gewisse Lagen des Punktes P vereinfacht sich die Konstruktion der von P zu ziehenden Normalen wesentlich, so z. B. wenn P auf einer Axe oder auf k selbst liegt; ferner im Fall einer Ellipse E für die Punkte der mit E konzentrischen Kreise mit den Radien $a + b$ und $a - b$. Es hat nämlich *F. E. Eckardt* den Satz bewiesen[213]): Bewegen sich auf diesen Kreisen von der Hauptaxe aus mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung zwei Punkte, so ist die Verbindungslinie entsprechender Lagen der Punkte eine Normale von E. Auch für Punkte jener Durchmesser von E, die zu den 2 einander gleichen konjugierten Durchmessern (Nr. **17**) rechtwinklig sind, tritt nach *C. Pelz*[214]) eine Vereinfachung ein. Gleiches gilt nach *K. Lauermann*[215]) für die Punkte zweier gewisser Kreise vom Radius $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, deren Zentren auf der Hauptaxe der Ellipse liegen. *F. Mertens*[216]) benutzte die schon bei *Chasles* auftretende Parabel p (Nr. **33**) und zeigte, dass für alle Punkte P eines gewissen Kegelschnitts q die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten von k und der zu P gehörigen Parabel p in 2 quadratische Aufgaben zerfällt. Die Bestimmung des durch einen gegebenen Punkt P gehenden Kegelschnitts q erfordert allerdings die Lösung einer Gleichung 3. Grades. *P. H. Schoute*[217]) knüpfte diese Untersuchungen von *Pelz, Lauermann*

211) *Gauss'* Brief an *H. C. Schumacher* 1842, im „Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Schumacher*", hrsgg. von *C. A. F. Peters,* Bd. 4, Altona 1862, p. 66 f. Werden die 4 den Parametern α, β, γ, δ zugehörigen Punkte des Kreises $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ in beliebiger Folge durch 2 Geraden verbunden, so bildet eine dritte den Winkel zwischen beiden halbierende Gerade mit der Hauptaxe der Ellipse einen Winkel von $\frac{1}{2}$ Rechten, wie *Gauss* gleichfalls bemerkt. Weitere hierher gehörige Sätze bei *Desboves* (Fussnote 189), ferner bei *H. Bassani,* Nouv. ann. (3) 4 (1885), p. 530 f.; *C. R. J. Kallenberg van den Bosch,* Nouv. ann. (3) 9 (1890), p. 395—400, *E. Barisien* und *L. Bosi,* Nouv. ann. (3) 10 (1891), p. 25 ff.

212) *R. Tucker,* London math. soc. Proc. 21 (1890), p. 442—451; Edinb. math. soc. Proc. 13 (1895), p. 29. Mehrere hierher und zu Nr. **33** gehörige Sätze hat auch *S. Roberts,* London math. soc. Proc. 9 (1877), p. 65—75 abgeleitet; weitere Sätze giebt *Weill,* Nouv. ann. (2) 20 (1881), p. 73—94.

213) Zeitsch. Math. Phys. 18 (1872), p. 107.

214) Wien. Ber. 95 (1887), p. 482—491.

215) Wien. Ber. 98 (1889), p. 318—326.

216) Ebenda p. 431—445.

217) Ebenda p. 1519—1526. Vgl. auch *Lauermann,* Wien. Ber. 107, Abt. II a (1898), p. 861—868.

und *Mertens* an die Diskussion einer Fläche 3. Grades, deren 27 Geraden [III C 6 Nr. 1] sich sofort angeben lassen. Er fand, dass es bei einer Ellipse ausser den von *Pelz* und *Lauermann* erwähnten Geraden und Kreisen keine Geraden und Kreise giebt, für deren Punkte das Normalenproblem auf zwei quadratische Aufgaben führt; im Fall einer Hyperbel giebt es nur zwei Geraden dieser Art. Endlich hat noch *J. Tesař* 2 rationale C_3 angegeben, deren jede zur Hauptaxe symmetrisch ist und für deren Punkte die Aufgabe, an die Kurven einer konfokalen Schar (Nr. **65**) je 4 Normalen zu ziehen, in 2 quadratische Aufgaben zerfällt [218]).

36. Krümmungskreis. Gross ist die Zahl der Konstruktionen für den dem Punkte P eines Kegelschnitts k zugehörigen Krümmungsradius ϱ [III D 1,2, Nr. **14**]. Betrachten wir vorerst einige Konstruktionen, die sich nicht auf die *berechnete* Länge von ϱ gründen. *R. Simson* [219]) benutzte die Thatsache, dass der Kreis, der k in P berührt und auf dem zu P gehörigen Durchmesser d ein Stück abschneidet, das gleich dem Parameter von d (Fussnote 9) ist, die Kurve nur noch in einem weiteren Punkte S trifft, mithin der Krümmungskreis von P sein muss. *Simson* wusste auch, dass die „Krümmungssehne" PS und die Tangente von P gegen die Hauptaxe der Kurve k unter gleichen Winkeln geneigt sind [220]). Auch *Poncelet* und *Plücker* gelangten zu dieser die Krümmungssehne benutzenden Konstruktion, und zwar unter Anwendung des Satzes, dass irgend ein Kegelschnitt, der durch die zwei im Endlichen gelegenen Grundpunkte eines Kreisbüschels (Nr. **51**) geht, von allen Kreisen des Büschels noch in Punktepaaren getroffen wird, deren Träger einander parallel sind. Bei Anwendung dieses Satzes hat man natürlich die 2 Grundpunkte nach P rücken zu lassen, so dass k von allen Kreisen des Büschels in P berührt wird [221]). *Chr. Paulus* gelangte zur Krümmungssehne, indem er k zu dem Krümmungskreis in perspektive kollineare Beziehung [III A 5, 6] setzte, bei der P das Zentrum der Kollineation ist. Zieht man nun

218) Wien. Ber. 101 (1892), p. 1248—1268. Daselbst wird ferner gezeigt, dass das Normalenproblem bei konfokalen Kegelschnitten sich auf den Schnitt einer einzigen Hyperbel mit den Kreisen eines gewissen Kreisbüschels (Nr. **51**) zurückführen lässt.

219) Sect. con. Buch 5, § 37 und 38; vgl. auch *C. Maclaurin*, „A treatise on fluxions", 1, 2. Aufl., London 1801, Nr. 374 f., die 1. Aufl. erschien 1742.

220) A. a. O. p. 202. Andere auf diesen Satz sich gründende Konstruktionen bei *G. de Longchamps*, Nouv. ann. (2) 19 (1880), p. 68 f.; *J. Zimmermann*, Arch. Math. Phys. 70 (1884), p. 33.

221) *Poncelet*, Traité, Nr. 404 f.; *Plücker*, Ann. de math. 17 (1826), p. 71 f. = Ges. Abh. 1, p. 61 f.

durch P ein Paar zu einander rechtwinkliger Geraden, die k noch in A und B treffen, so entspricht die Sehne AB einem Durchmesser des gesuchten Kreises, ihr Schnittpunkt M mit einer zweiten derartigen Sehne dem Mittelpunkt M_1 des Kreises. Die Polare von M in Bezug auf k ist als homologe Gerade zu der Polare von M_1 in Bezug auf den Kreis die Fluchtlinie in dem ebenen System des Kegelschnitts, die Kollineationsaxe ist zu ihr parallel und geht durch P. Durch diese Daten ist die Kollineation bestimmt, und der gesuchte Krümmungsmittelpunkt M_1 kann nunmehr als der zu M homologe Punkt konstruiert werden [222]). Aus einer von den Brüdern *M. H* und *C. Th. Meyer* angegebenen Konstruktion [223]) leitet *C. Pelz* die folgende einfachere ab: Das vom Pol der zu P gehörigen Normale auf den Durchmesser OP gefällte Lot schneidet auf der Normale ein Stück ab, das dem Krümmungsradius gleich ist, aber nach der entgegengesetzten Seite liegt [224]).

Steiner gründet eine Konstruktion auf folgenden von ihm gefundenen Satz: Beschreibt man einen Kreis k_1, der k in P berührt und den Direktorkreis (Nr. **16**) von k rechtwinklig schneidet, so ist sein Durchmesser gleich dem Krümmungsradius ϱ von P, liegt aber nach der entgegengesetzten Seite. Trifft nun die Normale n von P den Kreis k_1 in dem Punktepaare P, R und den Direktorkreis in L, M, so sind diese 2 Punktepaare (in Folge des orthogonalen Schneidens der 2 Kreise) konjugiert harmonisch, und man muss zur Bestimmung von R nur auf n den 4. harmonischen Punkt R zu P und dem Paare L, M aufsuchen; alsdann ist PR so gross wie ϱ. *Steiner* giebt auch an, wie man bei Hyperbeln, die in einem stumpfen Asymptotenwinkel liegen und bekanntlich einen imaginären Direktorkreis besitzen, zu

222) „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie", Stuttgart 1853, p. 242 f. Die Frage nach den Stellen der Kurve k, für die die Krümmungssehne ein Maximum oder Minimum wird, behandelt *Grunert,* Arch. Math. Phys. 50 (1869), p. 69—103. Weitere Eigenschaften der Krümmungssehnen und ihrer Enveloppe bei *R. de Paolis,* Giorn. di mat. 10 (1872), p. 320 f.; *L. Desmons,* Nouv. ann. (2) 12 (1873), p. 29—34; *Moret-Blanc,* ebenda, p. 34 ff.; *A. del Re,* Giorn. di mat. 22 (1884), p. 107—109; *J. Zimmermann,* Arch. Math. Phys. 70 (1884), p. 38—57; *A. Schwarz,* Monatsh. Math. Phys. 13 (1902), p. 205—240. *C. Cranz* zeigte, wie sich die meisten Konstruktionen des Krümmungsradius durch Modifikationen und Spezialisierungen der oben angegebenen Konstruktion ergeben, auch wenn k nicht gezeichnet vorliegt, sondern nur durch gewisse Stücke bestimmt ist („Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen 2. Ordnung", Stuttgart 1886, p. 8—20).

223) „Lehrbuch der axonometrischen Projektionslehre", Leipzig 1855—1863, Anhang, p. 12 f.

224) Prag. Böhm. Ber., Jahrg. 1879, p. 238.

verfahren hat[225]). Für die Parabel folgt, dass ϱ doppelt so gross ist, wie das Stück der Normale von P bis zum Schnitt mit der Direktrix[226]).

Steiner benutzte zur Konstruktion von ϱ auch eine Parabel p', die die Axen von k, sowie Tangente und Normale von P berührt (Nr. **33**), und zwar diese im Krümmungsmittelpunkt; die Direktrix der Parabel ist die Verbindungslinie von P mit dem Zentrum O von k.[227]) Der Krümmungsmittelpunkt C ergiebt sich als Schnitt der Normale mit der in Bezug auf p' genommenen Polare von P, die aus dem im Parabelbrennpunkt F auf PF errichteten Lote besteht. Die *Steiner*'sche Parabel ist wichtig, weil sich, wie *Pelz* zeigte[228]), fast alle Konstruktionen von ϱ aus den Eigenschaften von p' ableiten lassen. Wie S. 65 erwähnt wurde, ist diese Kurve p' eigentlich nur spezieller Fall einer von *Chasles* gefundenen Parabel p. Auch *Pelz* gelangte zu der *Chasles*'schen Definition und erkannte daher sofort, dass die in den Brennpunkten von k auf den Brennstrahlen errichteten Lote die Kurve p' berühren. Indem er 5 Parabeltangenten, unter denen sich die Normale n von P befinden muss, zu einem Fünfseit zusammenfasst, findet er den Berührungspunkt C der Parabel p' mit n mit Hülfe des für ein Tangentenfünfseit

---

225) J. f. Math. 30 (1845), p. 271 f. = Werke 2, p. 341 f. Auch die Umkehrung gilt, dass jeder Berührungskreis k_1, dessen Durchmesser gleich ϱ ist, den Direktorkreis rechtwinklig schneidet. Der Satz von *Steiner* ist spezieller Fall eines anderen von *A. Cazamian*, demzufolge die in P berührenden und k harmonisch umschriebenen C_2 (Nr. 82) in P denselben Krümmungsradius haben, der halb so gross ist, als der Krümmungsradius von P, wenn man P als Punkt von k ansieht (Nouv. ann. (3) 14 (1894), p. 365 f.). Weitere Beweise des *Steiner*schen Satzes bei *P. Serret*, „Géométrie de direction", Paris 1869, p. 219—221; *H. Lez*, Nouv. ann. (2) 10 (1871), p. 460 ff.; *C. Valentino*, Giorn. di mat. 9 (1871), p. 175 f.

226) Folgt auch sofort aus S. 69; *R. Simson* hat aber diesen Schluss nicht gezogen, vielmehr scheint *Poncelet* diese Bemerkung zwischen 1808 und 1810 gemacht zu haben (vgl. dessen Appl. d'anal. 1, p. 468—470 sowie Traité, 2. Aufl. Paris 1866, p. 298).

227) J. f. Math. 49 (1854), p. 339 = Werke 2, p. 629; *Steiner-Schröter*, p. 205. Vgl. auch *A. Mannheim*, Nouv. ann. 16 (1857), p. 328. Die Konstruktion des Brennpunktes F von p' ist einfach: Es ist OP eine Diagonale des durch die Axen, Tangente und Normale gebildeten Tangentenvierseits, ihr Pol also der Schnittpunkt der zwei anderen Diagonalen. Werden nun die Axen von der Normale in A und B getroffen, von der Tangente in A_1 und B_1, so ist F der Schnitt von AB_1 mit A_1B.

228) Prag. Böhm. Ber., Jahrg. 1879, p. 205—246; für ein eingehenderes Studium der Konstruktionen von ϱ bei Kegelschnitten sei überhaupt auf diese und auf die am Schluss von Fussnote 222 zitierte Schrift von *Cranz* verwiesen.

ausgesprochenen Satzes von *Brianchon* (Nr. **19**) und gelangt so zu zahlreichen einfachen Konstruktionen von ϱ. Wir erwähnen z. B. folgende für Ellipse und Hyperbel gültige: In den Schnittpunkten von n mit den Axen errichtet man auf den Axen Lote; die Senkrechte, die von ihrem Schnittpunkt auf den durch P gehenden Durchmesser gefällt wird, trifft alsdann n im Krümmungsmittelpunkt C. Aus dieser Konstruktion folgt leicht eine andere von *K. H. Schellbach*[229]) mitgeteilte, die auch für die Parabel gilt: Im Schnittpunkt der Normale n von P mit der einen Axe errichtet man auf n ein Lot, das den Durchmesser OP in D treffen möge; die von D auf dieselbe Axe gefällte Senkrechte schneidet n in C. Ferner sei erwähnt: Im Schnittpunkt Q der Normale mit der Hauptaxe errichte man auf n ein Lot; schneidet dieses den einen Brennstrahl von P in L, so trifft das auf dem Brennstrahl in L errichtete Lot die Normale n in C. Diese Konstruktion ist eine der ältesten, sie findet sich schon bei *J. Keill*[230]), der für die Länge ϱ den Wert $4\frac{\overline{PQ}^3}{p^2}$ erhielt und diesen Ausdruck in angegebener Weise konstruierte[231]). Für die Endpunkte der Nebenaxe einer Ellipse findet man somit $\varrho = \frac{a^2}{b}$, für die Scheitel der Hauptaxe ist, wie schon *Newton* berechnete[232]), bei allen Kegelschnitten ϱ gleich dem Semiparameter $\frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$. Allgemeiner zeigte *Ch. Dupin*[233]),

---

229) „Die Kegelschnitte, für den Gebrauch in Gymn. u. Realsch. bearbeitet", Berlin 1843, p. 83. Hier überhaupt mehrere Konstruktionen von ϱ.

230) Lond. Trans. 26 (1708), p. 177 ff. *Keill* benutzt auch schon den Satz, dass die Projektion der Normale PQ auf jeden der beiden Brennstrahlen gleich dem Semiparameter ist (vgl. Fussnote 187); die schon bei *Apollonius* (Buch 5, § 8 und 58) erwähnte Konstanz der Subnormale bei der Parabel ist von diesem Satz nur ein spezieller Fall.

231) Der Ausdruck findet sich auch bei *Newton*, „The method of fluxions and infinite series", London 1736, p. 63 = Bd. 1 der Ausg. von *S. Horsley*, London 1779, p. 447. Das vielleicht (vgl. *Cantor*, Gesch. d. Math. 3, p. 109 und 168) schon 1671 geschriebene Werk hat bei *Horsley* den Titel „Geometria analytica". Auch die bekannte Formel $\varrho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ findet sich in ihm zuerst (p. 62 bezw. 446), sowie die Angabe, dass für die Parabel $y^2 = px$ der Krümmungsmittelpunkt die Abscisse $3x + \frac{p}{2}$ hat (p. 63 bezw. 447). Die bei *Newton* stehenden Formeln hat zum grossen Teil auch *De l'Hospital*, „Analyse des infiniment petits", 1. Aufl. Paris 1696.

232) A. a. O. p. 74, in der Ausgabe von *Horsley* p. 458.

233) „Développements de géométrie", Paris 1813, p. 29, im wesentlichen auch schon in J. éc. polyt., 7 cah. 14 (1808), p. 71 f. Schon bei *Euler* („Intro-

dass für den Endpunkt P irgend eines Halbmessers $OP = b'$ der Krümmungsradius ϱ gleich $\frac{a'^2}{d}$ ist, wo a' die Länge des zu b' konjugierten Halbmessers und d dessen Abstand von P bezeichnet, oder auch $\varrho = \frac{a'^2}{b' \sin \varphi}$, unter φ den Winkel zwischen a' und b' verstanden, oder endlich $\varrho = \frac{a'^3}{ab}$, da $a'b' \sin \varphi = ab$. Im Falle der Parabel genügt es, wie *Keill* erwähnt und leicht zu zeigen ist, die Gerade PF über den Brennpunkt F hinaus um sich selbst zu verlängern bis L, das in L auf LF errichtete Lot trifft die Normale von P in C; bei der Parabel ist also die Projektion des Krümmungsradius auf den Brennstrahl gleich der doppelten Länge des Brennstrahls[234]).

Bei Ellipse und Hyperbel hängt ϱ, wie schon *De l'Hospital*[235]) bemerkte, mit den Brennstrahlen r_1 und r_2 zusammen vermöge der Formel $\frac{2}{\varrho \cos \omega} = \frac{1}{r_1} \mp \frac{1}{r_2}$, wo ω den Winkel zwischen Normale und Brennstrahl bedeutet und das Zeichen $+$ der Ellipse, $-$ der Hyperbel entspricht. Im ersten Fall folgt weiter $\frac{2}{\varrho} = \frac{1}{PG} + \frac{1}{PH}$, wo PG und PH die Stücke sind, die die auf den Brennstrahlen in F_1 und F_2 errichteten Lote auf der Normale abschneiden (Fig. 12). Der Krümmungsradius ist daher das harmonische Mittel zu diesen Segmenten, oder C ist der vierte harmonische Punkt zu P und dem Punktepaare G, H.[236])

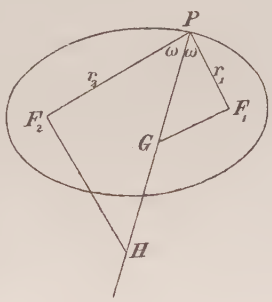

Fig. 12.

ductio in analysin infinitorum" 2, Lausannae 1748, Nr. 317, p. 172) findet sich $\varrho = a^2b^2 : d^3$. Vgl. noch *A. Transon*, Nouv. ann. 3 (1844), p. 595 f. und J. de math. 10 (1845), p. 151 f.; *Chasles*, J. de math. 10 (1845), p. 208; *E. Lamarle*, Bruxelles Bull. (2) 3 (1857), p. 309 f.; *L. F. Pasalagua*, Nouv. ann. (2) 7 (1868), p. 518 f.

234) Vgl. auch *L. Mack*, Arch. Math. Phys. 61 (1877), p. 385—406.

235) A. a. O. [231]), sect. VI, Nr. 118, p. 109. Andere Formeln dieser Art bei *E. Lamarle*, Bruxelles Bull. (2) 2 (1857), p. 66—74, 540—543, ferner ebenda (2) 3 (1857), p. 307—314 und 6 (1859), p. 11—23. Für die Parabel wird $\varrho = 2r : \cos \omega$.

236) Wie *Mack* [234]) bemerkt, hat diesen Satz zuerst *B. von Gugler*. Man erkennt leicht, dass $2\varrho \cdot \cos \omega$ gleich der von P aus durch F_1 oder F_2 gezogenen Sehne des Krümmungskreises von P, gleich der „Fokalsehne der Krümmung für Punkt P" ist; diese ist also das Doppelte des harmonischen Mittels der Brennstrahlen (*Salmon*, „A Treatise on conic sections", Dublin 1848, p. 279; *Salmon-Fiedler*, Kegelschn., p. 428). *R. Townsend* fand sie gleich der zur Tangente von P parallelen Fokalsehne des Kegelschnitts, *Salmon-Fiedler*, a. a. O. p. 429.

Eine metrische Relation findet sich auch bei *v. Staudt.* Werden nämlich auf der in P an einen Kegelschnitt gezogenen Tangente p zwei Punkte Q, R angenommen, denen die Polaren q, r zugehören, so ist $\varrho = \frac{PQ \cdot PR \cdot \sin(qr)}{QR \cdot \sin(pq) \cdot \sin(pr)}$ [237]).

Zahlreiche Konstruktionen von ϱ wurden auch gegeben für den Fall, dass die Kurve nur durch P und gewisse andere Stücke bestimmt ist[238]).

---

237) „Beiträge zur Geom. d. Lage", 2. Heft, Nürnberg 1857, p. 280 f. Der Beweis wird einfach geführt, indem *v. Staudt* auf p noch einen 4. Punkt P_1 annimmt; die 4 Punkte sind dann zu ihren Polaren projektiv. Der Ausdruck hierfür wird aufgestellt, man lässt P_1 nach P rücken und beachtet, dass $\varrho = \lim \frac{PP_1}{\sin(pp_1)}$, wo p_1 die Polare von P_1 bedeutet. — Leicht konstruierbar ist auch ein von *G. de Longchamps,* Nouv. ann. (2) 19 (1880), p. 69—71 gegebener Ausdruck. Trifft nämlich die in P gezogene Tangente die eine Axe in A, die andere in B und ist δ der Abstand der Tangente vom Mittelpunkt O der Kurve, so wird $\varrho = \frac{PA \cdot PB}{\delta}$; im Fall der Parabel tritt an Stelle hiervon der Satz, dass die Krümmungssehne viermal so gross ist als PA. *J. Neuberg* entwickelt für den Krümmungsradius des einem Dreieck umschriebenen Kegelschnitts die Formel $\varrho = -\frac{rxyz}{\alpha\beta\gamma}$, wo r den Radius des Umkreises bezeichnet und x, y, z die Abstände des Punktes P von den Seiten, α, β, γ die Abstände der in P gezogenen Tangente von den Ecken des Dreiecks sind. Ähnliche Ausdrücke gelten, wenn P auf einem eingeschriebenen oder einem solchen Kegelschnitt liegt, der das Dreieck zum Poldreieck hat (Bruxelles Bull. (3) 25 (1893), p. 384; vgl. auch *V. Jamet,* Ann. éc. norm. (3) 4 supplém. (1887), p. 19—22). Andere metrische Relationen bei *R. F. Davis, E. Rutter, R. Tucker* in Educ. Times 25 (1876), p. 23 f.; *A. W. Cave, R. Tucker* in Educ. Times 26 (1876), p. 23 f.; *P. Riemann,* „Die Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte", Diss. inaug. Marburg 1881. Für Konstruktionen von ϱ vgl. auch *E. Janisch,* Monatsh. f. Math. 10 (1899), p. 182—188.

238) *Chasles,* J. de math. 10 (1845), p. 208; Sect. con. p. 48 f.; *M. H.* und *C. Th. Meyer* in dem schon zitierten [223]) Buche; *H. Meyer,* Arch. Math. Phys. 24 (1855), p. 5—21; *W. Fiedler,* „Die darstellende Geometrie", 2. Aufl. Leipzig 1875, p. 135; *A. Mannheim,* Par. C. R. 80 (1875), p. 620; „Cours de géométrie descriptive", Paris 1880, p. 175—177; Par. soc. math. Bull. 18 (1890), p. 155—160; „Principes et développements de géométrie cinématique", Paris 1894, p. 17—21, 62 f., 481—483; *K. Lauermann,* Wien Ber. 83 (1880), p. 95; *Genty,* Nouv. ann. (2) 19 (1880), p. 220—223; *M. d'Ocagne,* Nouv. ann. (2) 19 (1880), p. 267—272; *A. Weiler,* Zürich. Viert. 33 (1888), p. 119—122; Zeitsch. Math. Phys. 34 (1889), p. 1—5, 177—184, 282—289; *Cl. Servais,* Nouv. ann. (3) 7 (1888), p. 369—374, ebenda (3) 11 (1892), p. 424—428; Bruxelles Bull. (3) 19 (1890), p. 231—241, 519—540, 759—763; ebenda (3) 23 (1892), p. 243—260; *G. Fouret,* Par. C. R. 110 (1890), p. 778—780 und 843 f.; *R. Mehmke,* Riv. di mat. 2 (1892), p. 67—70; *J. Neuberg,*

37. Satz von Steiner über Krümmungskreise. *Steiner* hat zuerst den Satz ausgesprochen, dass durch jeden Punkt D einer Ellipse drei Krümmungskreise gehen, die die Kurve in drei anderen Punkten A, B, C oskulieren, und immer liegen die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise[239]). In den hinterlassenen Manuskripten *Steiner*'s findet sich auch die Bemerkung, dass bei der Ellipse die Dreiecke ABC gleichen maximalen Inhalt haben, und dass umgekehrt die den Ecken eines eingeschriebenen grössten Dreiecks ABC zugehörigen Krümmungskreise sich in einem Punkt D der Ellipse schneiden, der mit A, B, C auf einem Kreis liegt[240]). Dass die Schwerpunkte der eingeschriebenen grössten Dreiecke im Ellipsenmittelpunkt liegen, hatte *Steiner* schon vorher bemerkt[241]), ebenso, dass jeder Kurvenpunkt Ecke eines solchen Dreiecks ist. *F. August* bewies rein synthetisch den umfassenderen Satz: Es giebt im allgemeinen drei Kegelschnitte, die durch einen Punkt D eines gegebenen Kegelschnitts k sowie zwei andere Punkte F, G der Ebene gehen und k in je einem Punkte oskulieren; die drei Oskulationspunkte A, B, C liegen mit D, F, G

Bruxelles Bull. (3) 25 (1893), p. 374—386; *Kinkelin,* Zeitsch. Math. Phys. 40 (1894), p. 58 f.; *J. Sobotka,* Prag. Böhm. Ber. Jahrg. 1894; *A. Cazamian,* Nouv. ann. (3) 14 (1895), p. 366—369; *K. Rohn,* Leipz. Ber. 52 (1900), p. 17—24.

239) J. f. Math. 32 (1845), p. 300 = Werke 2, p. 377. Durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen übrigens, wie *J. Casey,* Dublin Trans. 24 (1867), p. 479 zeigte, 6 Krümmungskreise einer Ellipse oder Hyperbel, und ihre Mittelpunkte liegen nach *J. C. Malet,* Dublin Trans. 26 (1878), p. 434 auf einem Kegelschnitt. Allgemeiner gehen durch die Ecken eines Dreiecks Δ 6 Kegelschnitte, die einen gegebenen k oskulieren; die 6 Oskulationspunkte sind nach *A. v. Brill* wieder solche Punkte für die 4 anderen Dreiecken umschriebenen Kegelschnitte, und es lassen sich diese Dreiecke aus Δ und k linear konstruieren (Math. Ann. 20 (1882), p. 533 f.). Vgl. auch *W. Fr. Meyer,* Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883, Abschn. 3, 4, sowie Fortschr. Math. 14 (1885), p. 64.

240) Auch sind die in A, B, C gezogenen Tangenten den Gegenseiten parallel; vgl. Fussnote 89. Je 4 der eingeschriebenen grössten Dreiecke sind kongruent (mitgeteilt von *C. F. Geiser,* J. f. Math. 66 (1865), p. 239—241 = *Steiner*'s Werke 2, p. 691—693). Das Produkt der zu A, B, C gehörigen Krümmungsradien ist nach *J. J. A. Mathieu* (Nouv. ann. (2) 11 (1872), p. 429) gleich dem Kubus des Umkreisradius von ABC.

241) J. f. Math. 30 (1845), p. 275 f. = Werke 2, p. 347 f. Auf anderem Wege gelangte *Chasles,* J. de math. 2 (1837), p. 401—405 zu diesen Dreiecken. Weitere Sätze bei *F. Unferdinger,* Arch. Math. Phys. 51 (1870), p. 127; *J. J. Walker,* Educ. Times 15 (1871), p. 29 f.; *K. Zahradnik,* Arch. Math. Phys. 69 (1883), p. 419—426; *C. M. Piuma,* Giorn. di mat. 22 (1883), p. 17—26; *G. Fazzari,* Giorn. di mat. 25 (1887), p. 307. Auch *F. Joachimsthal* zeigte (J. f. Math. 36 (1847), p. 95 f.), dass der Schwerpunkt des Dreiecks ABC der Oskulationspunkte im Ellipsenmittelpunkt liegt und bewies überhaupt den oben an erster Stelle angeführten Satz von *Steiner* sowie weitere Sätze. Andere Beweise gaben *V. Janni,* Ann. di

auf einem Kegelschnitt. Sind F, G die imaginären Kreispunkte, so hat man den *Steiner*'schen Satz[242]).

38. Beziehungen zwischen Krümmungsradien verschiedener Punkte. Hier ist von Wichtigkeit ein für beliebige algebraische Kurven gültiger Satz von *J. M. C. Duhamel*[243]). Zieht man nämlich an eine solche Kurve alle einer gegebenen Richtung parallele Tangenten, so ist die Summe der den Berührungspunkten zugehörigen Krümmungsradien gleich Null. *A. Mannheim*[244]) hat aus diesem Satz den folgenden abgeleitet: Zieht man von irgend einem Punkte S der Ebene alle Tangenten an eine C_n und dividiert jeden der den Berührungspunkten zugehörigen Krümmungsradien ϱ_i durch den Kubus der Entfernung t_i des Berührungspunktes von S, so ist $\sum \frac{\varrho_i}{t_i^3} = 0$. Bei Anwendung auf Kegelschnitte würde sich ergeben $\varrho_1 : \varrho_2 = t_1^3 : t_2^3$, wie auf anderem Wege zuerst *J. Liouville* fand[245]).

Gestützt auf die Relation $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2n\pi$, die die Parameter von vier zugleich auf einer Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ und auf einem Kreis gelegenen Punkte erfüllen (vgl. Fussnote 210), fand *A. Cazamian*, dass die Krümmungskreise solcher vier Punkte die Ellipse noch in vier Punkten treffen, die wieder auf einem Kreis liegen[246]).

---

mat. 4 (1861), p. 190—201; *Em. Weyr,* Casopis 2 (1873), p. 65—69; *S. Kantor,* Zeitsch. Math. Phys. 23 (1878), p. 414—416; *C. M. Piuma,* Giorn. di mat. 26 (1888), p. 189—196; *A. Schwarz,* Monatsh. Math. Phys. 10 (1899), p. 258—288; 11 (1900), p. 71—86; 13 (1902), p. 240—293.

242) J. f. Math. 68 (1867), p. 235—238. Eine andere Verallgemeinerung rührt her von *A. del Re,* Giorn. di mat. 22 (1884), p. 89—107. Er zeigte, dass es auf k immer 4 Punkte giebt, deren Krümmungskreise mit k solche Sehnen gemeinsam haben, die durch einen beliebig gegebenen Punkt D der Ebene gehen, und jene 4 Punkte liegen auf einem Kreis. A. a. O. noch weitere Sätze.

243) *J. Liouville* teilt diesen Satz mit J. de math. 6 (1841), p. 364.

244) Nouv. ann. (3) 11 (1892), p. 432 f. Vgl. auch „Cours de géométrie descr.", 2. Aufl. Paris 1886, p. 211—216.

245) J. de math. 9 (1844), p. 350 f. Einen anderen Beweis dieser Formel giebt *H. Umpfenbach,* J. f. Math. 30 (1845), p. 95 f., einfacher *v. Staudt,* „Beitr. zur Geom. d. Lage", 2. Heft, Nürnberg 1857, p. 282 f. Dieser zeigt auch, dass $t_1 : t_2 = d_2 : d_1$, unter d_1 und d_2 die Abstände des Kurvenmittelpunktes von den in A und B gezogenen Tangenten verstanden, so dass $\varrho_1 : \varrho_2 = d_2^3 : d_1^3$, und hieraus gewinnt er die schon oben[233]) erwähnte *Euler*'sche Formel $\varrho = a^2 b^2 : d^3$ („Beitr. zur Geom. d. Lage", 3. Heft, Nürnberg 1860, p. 386 f.). Vgl. ferner *Cl. Servais,* Bruxelles Bull. (3) 23 (1892), p. 243—260; *E. Catalan,* ebenda, p. 500—502; *R. Tucker,* Educ. Times 16 (1872), p. 48.

246) Nouv. ann. (3) 13 (1894), p. 386—388. Bei 4 „concyklischen" Punkten der Parabel $x = 2pt^2$, $y = 2pt$ hat man $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$; a. a. O. p. 281.

39. Krümmungsradien sich berührender Kegelschnitte hat *Em. Weyr* betrachtet. Zunächst bewies er, dass, wenn sich auf k eine Tangenteninvolution n^{ten} Grades (III C 10) befindet, die Schnittpunkte entsprechender Tangenten eine C_{n-1}, die Involutionskurve erfüllen[247]). Nehmen wir nun auf k eine kubische Tangenteninvolution mit dem dreifachen Element a an. Der Involutionskegelschnitt i berührt dann k im Berührungspunkt A von a und ist überdies einem Tangentendreiseit von k umschrieben. Irgend zwei Involutionskegelschnitte, die k in A berühren, haben ausser A nur einen weiteren Punkt gemeinsam, weil die zwei Involutionen, denen sie entsprechen, ausser dem dreifachen Element a nur noch ein Elementenpaar gemeinsam haben können. Daher oskulieren sich die zwei Involutionskegelschnitte in A, haben somit in A gleiche Krümmung. Man kann auch sagen, dass alle Kegelschnitte, die k in A berühren und Tangentendreiseiten von k umschrieben sind, in A gleichen Krümmungsradius haben, der, wie die Rechnung zeigt, viermal kleiner als der Krümmungsradius für A ist, wenn A als Punkt von k angesehen wird. Betrachtet man i als Fundamentalkegelschnitt, so ist umgekehrt k ein Involutionskegelschnitt für eine auf i befindliche Punktinvolution, und man kann sagen, dass wenn sich zwei „kubisch-involutorisch liegende Kegelschnitte“ berühren, der Träger der Punktinvolution die viermal grössere Krümmung hat[248]).

E. Wölffing wies synthetisch nach, dass das Verhältnis δ der Krümmungsradien im Berührungspunkt zweier Kegelschnitte und damit zweier Kurven überhaupt eine Invariante (Nr. 86 und I B 2) ist. Er bestimmt auch die Krümmungsradien der durch den Berührungspunkt gehenden harmonischen Kurve 2. Ordnung und der harmonischen Kurve 2. Klasse (Nr. 48) und giebt Sätze für den Fall der „symmetrischen Berührung“ ($\delta = -1$). Ferner zeigt er, dass bei zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten δ in beiden Berührungspunkten den gleichen Wert hat[249]).

40. Evolute. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Kurven-

---

247) J. f. Math. 72 (1870), p. 287.

248) *Em. Weyr,* Wien Ber. 83 (1881), p. 63—68.

249) Zeitsch. Math. Phys. 38 (1893), p. 236—246. Die quadratische Gleichung mit den Wurzeln δ und $\frac{1}{\delta}$, in der die 4 Invarianten (Nr. 86) der 2 Kegelschnitte auftreten, giebt er Math. Ann. 36 (1889), p. 119. Vgl. übrigens auch *L. Geisenheimer,* Zeitsch. Math. Phys. 24 (1879), p. 357 und ebenda 25 (1880), p. 214 f.; *R. Mehmke,* Zeitsch. Math. Phys. 38 (1893), p. 7—22. Allgemeinere Sätze giebt *Mehmke* ebenda 36 (1891), p. 56—60. Vgl. auch I B 2, Nr. 22, Fussn. 346.

punkte, die sogenannte *Evolute*[250]) der Kurve (III D 1, 2 Nr. **16**), ist für die Ellipse oder Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine C_6 mit der Gleichung

$$(ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}, \text{ wo } c^2 = a^2 - b^2; \tag{35}$$

diese Kurve hat sechs Spitzen: je zwei auf jeder Axe des Kegelschnitts, je eine in dessen unendlich fernen Punkten. Die Parabel $y^2 = px$ hat zur Evolute eine C_3, die *Neil*'sche Parabel[251])

$$27py^2 - 2(2x - p)^3 = 0. \tag{36}$$

Ist C der Krümmungsmittelpunkt von P, so kann man nach dem zu C als Punkt der Evolute gehörigen Krümmungskreis fragen. Schon *C. Maclaurin* giebt folgendes Verfahren zu dessen Konstruktion: Man zieht rechtwinklig zu PC durch C eine Gerade, die den zu P gehörigen Kegelschnittdurchmesser in D trifft und trägt auf sie von C aus nach der zu CD entgegengesetzten Seite hin die Strecke $3CD$ ab; ihr Endpunkt ist dann der Mittelpunkt jenes Kreises[252]).

---

250) Dieser Name und die Anfänge der Theorie der Evolute und Evolvente finden sich zuerst bei *Chr. Huygens,* „Horologium oscillatorium", Paris 1673, 3. Teil = Bd. 1, p. 89—117 der Ausgabe von *J. 'sGravesande,* Leiden 1751.

251) Die Kurve heisst *Neil*'sche Parabel, weil *W. Neil* schon 1657 bei ihr die Bogenlänge bestimmt haben soll (vgl. übrigens *Cantor,* Gesch. d. Math. 2, p. 905; 3, p. 138 und 141). Die Gleichung der Evolute der gleichseitigen Hyperbel und der Parabel finden sich bei *Huygens* a. a. O. p. 107 bezw. 99. Zahlreiche Sätze über die Evolute der Parabel und ihre Beziehungen zur Grundkurve giebt *E. N. Barisien,* J. math. spéc. (4) 2 und 3 (1893—1894) an mehreren Stellen. Die Ableitung der Evolutengleichung für einen auf beliebige projektive Koordinaten bezogenen Kegelschnitt hat *Gundelfinger,* Vorl., p. 208—218, sowie 378—381 gegeben. Daselbst auch die Gleichung des einem beliebigen Punkt einer C_n oder C^k zugehörigen Krümmungsmittelpunktes und ein Ausdruck für die Länge des Krümmungsradius. Für Normalkoordinaten vgl. *R. H. Pinkerton,* Edinb. math. soc. Proc. 9 (1891), p. 1—4.

252) „A treatise on fluxions", Bd. 1, Nr. 404, 2. Aufl. London 1801; die 1. Aufl. erschien 1742. Vgl. auch *A. Transon,* J. de math. 6 (1841), p. 193 und 205 f., sowie *A. Mannheim,* „Principes et développements de géométrie cinématique", Paris 1894, p. 21 f. und 63 f.; ferner *G. Fouret,* Par. C. R. 110 (1890), p. 843—845 und *R. Godefroy,* J. éc. polyt., cah. 62 (1892), p. 37—44; Par. soc. math. Bull. 21 (1893), p. 20—25. Mit Hülfe des einem Kurvenpunkt P zugehörigen Krümmungsradius ϱ und eines weiteren passend gewählten und durch P bestimmten Stückes lässt sich für jede Kurve eine Gleichung (natürliche Gleichung, natürliche Koordinaten) aufstellen, die diese Kurve unabhängig von ihrer Lage in der Ebene oder im Raume bestimmt, also nur die Gestalt der Kurve bestimmt. *Gergonne* (Ann. de math. 4 (1813), p. 46—54) wählte als zweites Bestimmungsstück dieser Art den Krümmungsradius ϱ_1 des dem Punkte P zugehörigen Evolutenpunktes P_1, des Krümmungsmittelpunktes von P, und er wandte a. a. O. diese Darstellungsmethode auf die Kegelschnitte an. *E. Cesàro* wählte statt ϱ_1

Im Anschluss an den Satz, dass, wenn eine Parabel die Axen einer Ellipse berührt, die den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten beider Kurven zugehörigen Normalen durch einen Punkt gehen, giebt *E. Laguerre* einen Satz über die Tangenten der Ellipsenevolute. Jede solche Tangente trifft die Evolute in weiteren 4 Punkten, und die in ihnen gezogenen Tangenten gehen alsdann durch einen und denselben Punkt T.[253])

D. Quadratur und Rektifikation.

41. Quadratur. Bezüglich der Quadratur oder Flächenberechnung der Kegelschnitte können wir uns kurz fassen. Schon *Archimedes* bestimmte den Inhalt des von einer Parabel durch eine Parallele zur Scheiteltangente abgeschnittenen Flächenstückes gleich vier Dritteilen eines Dreiecks, das mit dem Abschnitt Grundlinie und Höhe gleich hat[254]). Ferner bestimmte er den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbaxen a, b gleich $ab\pi$,[255]) wobei er wusste, dass $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.[256]) Das Auftreten natürlicher Logarithmen bei Flächen, die durch einen Hyperbelbogen, eine Asymptote und zwei Parallelen zur anderen Asymptote begrenzt werden, erkannte *Gregorius von Sanct Vincentius*, ohne dies besonders zu erwähnen; hervorgehoben wurde diese Thatsache durch *A. de Sarasa*[257]).

die von einem willkürlich aber fest gewählten Kurvenpunkte gemessene Bogenlänge s („Lezioni di geometria intrinseca", Napoli 1896. Deutsche Ausgabe von *G. Kowalewski*, Leipzig 1901; für die Kegelschnitte kommt hauptsächlich § 25—33 in Betracht). *G. Scheffers* („Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume", Leipzig 1901, § 9) wählte als natürliche Koordinaten das Krümmungsmass $k = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}$ und den Differentialquotienten $\frac{dk}{d\tau}$, wo $d\tau$ den Winkel der zwei unendlich benachbarten, in den Endpunkten des Bogenelements ds gezogenen Tangenten (Kontingenzwinkel [III D 1, 2, Nr. **14**]) bezeichnet. Es sei noch hingewiesen auf III D 1, 2 Nr. **15** und **32** und *Magnus*, Aufg., § 137—139. Eine Fülle weiterer Litteraturangaben bei *E. Wölffing*, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 142—159.

253) Par. C. R. 84 (1877), p. 225 f. Der Ort aller Punkte T ist eine C_2, deren Scheitel sich in den im Endlichen gelegenen Spitzen der Evolute befinden.

254) *Archimedes'* Schrift über die Quadratur der Parabel, § 17 und 24, in Opera omnia, ed. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1881, p. 334 und 348 ff. Deutsche Übersetzung von *E. Nizze*, Stralsund 1824, p. 21 und 24.

255) Schrift über Konoide und Sphäroide, in Opera omnia, ed. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1880, p. 306—317; Übers. von *Nizze*, p. 160 f.

256) Schrift über Kreismessung § 3, Ausgabe von *Heiberg* 1, p. 262—270, Übers. von *Nizze*, p. 111—115.

257) *Gregorius von St. Vincentius*, „Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni", 1647; *A. de Sarasa*, „Solutio problematis a *R. P. Marino Mersenno* propositi, 1649. Vgl. *Cantor*, Gesch. d. Math. 2, p. 714 f.

42. Rektifikation. Sätze von Fagnano, Landen, Euler u. A. [III B 3]. Ausgehend von Beziehungen zwischen gewissen Differentialen fand *G. Fagnano,* dass man zu dem von $x = 0$ bis $x = x$ gemessenen Bogen $X = BP$ einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (Fig. 2) stets einen von $x = 0$ bis $x = z$ gemessenen Bogen $Z = BQ$ angeben kann, sodass $X + Z = \frac{\varepsilon^2 xz}{a} + \frac{E}{4}$ ist, wo ε die numerische Exzentrizität, E den Umfang der ganzen Ellipse bezeichnet[258]). Da diese Formel, wie man sofort sieht (Fig. 2), gleichbedeutend ist mit $BP - AQ = \frac{\varepsilon^2 xz}{a}$, so lassen sich bei einer Ellipse auf unendlich viele Arten zwei Bögen angeben, deren Differenz geometrisch gleich einer mit Hülfe von Zirkel und Lineal konstruierbaren Geraden ist, ein Satz, der gewöhnlich als „Theorem von Fagnano" bezeichnet wird. Auf ähnliche Art wie bei der Ellipse fand *Fagnano* zu einem beliebig gegebenen Hyperbelbogen einen anderen von solcher Beschaffenheit, dass die Längendifferenz beider gleich einer mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Geraden ist.

C. Maclaurin brachte die Integrale, die die Bogenlänge eines Kegelschnitts darstellen, in gewisse einfache Formen, indem er den Zuwachs des Hyperbelbogens in Beziehung setzte zu dem Zuwachs einer bestimmten in seiner Figur hervortretenden Strecke[259]).

J. Landen erkannte, dass sich ein beliebiger Hyperbelbogen durch zwei Ellipsenbögen ausdrücken lässt[260]).

---

258) Giorn. de' letterati d' Italia 26 (1716), p. 266 = Produzioni matem. di *Fagnano* 2, Pesaro 1750, p. 336—342. Zwei weitere Arbeiten von *Fagnano* behandeln die Bogenlänge der gleichseitigen Hyperbel und jener Ellipse, bei der $a = b\sqrt{2}$, Produzioni matem. 2, p. 504—509, 510—536. Näheres auch bei *Cantor,* Gesch. d. Math. 3, p. 467—470; *A. Enneper,* „Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte", hrsgg. von *F. Müller,* 1. Aufl. Halle 1876, Anhang Note VI; 2. Aufl. 1890, Anhang Note II; *O. Böklen,* Math.-naturw. Mitt. des math.-naturw. Vereins in Württemberg (2) 1 (1899), p. 65—71. Geometrisch wurde das Theorem von *Fagnano* für die Ellipse zuerst von *J. Brinkley,* Dublin Trans. 9 (1803), p. 145—158 bewiesen; daselbst auch folgender Satz: Ein Ellipsenhalbmesser von der Länge $\sqrt{ab}$ treffe verlängert den zugehörigen Quadranten des über der Hauptaxe als Durchmesser beschriebenen Kreises in S; schneidet alsdann die durch S gezogene Ordinate die Ellipse in P, so ist die Differenz der Bogen BP und AP gleich $a - b$, wo B und A die Endpunkte des zugehörigen Ellipsenquadranten bezeichnen.

259) „A treatise on fluxions", Edinburgh 1742, Nr. 799—808. Näheres bei *Cantor,* Gesch. d. Math. 3, p. 871 ff. und *F. Müller,* „Studien über *Maclaurins* geometr. Darstellung ellipt. Integrale", Progr. Kgl. Realschule (Kaiser Wilhelms-Realgymn.), Berlin 1875.

260) Lond. Trans. Jahrg. 1771, p. 298—309 und Jahrg. 1775, p. 285. Ein anderer Beweis dieses Theorems bei *Legendre,* Paris Hist., Jahrgang 1786 (ge-

Zahlreiche Sätze über Bögen der Kegelschnitte rühren von *Euler* her. In seiner ersten hierauf bezüglichen Abhandlung[261]) behandelt er die Aufgabe, auf Ellipsen, die eine Axe gemeinsam haben, vom einen Endpunkt derselben gleiche Bogenlängen abzuschneiden und die Kurve zu bestimmen, auf der die Endpunkte dieser Bögen liegen. Ferner[262]) reproduzierte er mehrere Formeln von *Fagnano*. Um zu einem Ellipsenbogen BP einen anderen AQ zu bestimmen (B und A Scheitel der kleinen bezw. grossen Axe), deren Differenz durch eine Gerade darstellbar ist, giebt *Euler* folgende Konstruktion: Man ziehe in P die Tangente und trage auf sie von ihrem Schnittpunkt R mit der kleinen Axe aus in der Richtung nach P die Länge der halben grossen Axe $RS = a$ ab; das von S auf die grosse Axe gefällte Lot treffe den zugehörigen Ellipsenquadranten in Q. Die Differenz $BP - AQ$ findet man gleich der Länge des vom Kurvenmittelpunkt auf die Normale von P oder Q gefällten Lotes. Ferner zeigt er, wie man auf einem Ellipsenquadranten BA einen Punkt D finden kann, so dass $BD - AD = a - b$. Für die Hyperbel fand er (natürlich in jedem Quadranten) einen ganz bestimmten Punkt H und zwei auf verschiedenen Seiten von H liegende Bögen PH und HQ, deren Differenz geometrisch ausdrückbar ist. Die Ordinate von H muss hierbei das geometrische Mittel der Ordinaten von P und Q sein, an weitere Bedingungen sind diese Punkte nicht gebunden, der eine von beiden kann also willkürlich gewählt werden[262]). Bei der Parabel zeigt *Euler*, wie man zu einem beliebig gegebenen Bogen b_1 von einem beliebigen Kurvenpunkt aus einen solchen Bogen b_2 abschneiden kann, dass $b_1 - b_2$ geometrisch ausdrückbar ist, oder auch dass b_2 ein gegebenes Vielfache von b_1 um eine geometrisch ausdrückbare Grösse übertrifft, oder diesem Vielfachen gleich ist[263]).

Mit Hülfe einer Formel, die das Additionstheorem der Integrale erster und zweiter Gattung (II B 3) als speziellen Fall enthält, ge-

druckt 1788), p. 652. Einen geometrischen Beweis des Theorems von *Landen* gab *J. Mac Cullagh*, Dublin Trans. 16^2 (1829), p. 83 = Coll. works, Dublin und London 1880, p. 258 f. Zu den Theoremen von *Fagnano* und *Landen* vgl. ferner *C. Küpper*, J. f. Math. 55 (1857), p. 89—93; *J. Griffiths*, Lond. math. soc. Proc. 11 (1880), p. 87—91.

261) Petrop. Comm. 8 (1736, gedruckt 1741), p. 86—98.

262) Petrop. Novi Comm. 6 (1756—1757, gedruckt 1761), p. 58—67. Vgl. auch *M. Azzarelli*, Rom Lincei Atti nuovi 24 (1871), p. 336 f., 343—354 und 25 (1872), p. 427 ff., 433—439. In ähnlicher Weise wie *Euler* gewinnt auch *H. F. Talbot*, Lond. Trans. Jahrg. 1836, p. 177—215 einige Sätze, besonders für die gleichseitige Hyperbel.

263) Petrop. Novi Comm. 7 (1758—1759, gedruckt 1761), p. 83—119.

winnt *Euler*[264]) zahlreiche Sätze über Vergleichung von Ellipsenbögen. Setzt man nämlich:

$$(37)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{A' + B'x^2 + C'x^4}{\sqrt{A + Cx^2 + Ex^4}}\,dx = \Pi(x), \\ \text{so ist:} \\ \Pi(x) - \Pi(y) - \Pi(k) = \dfrac{xyk}{\sqrt{A}}\left\{B' + \dfrac{C'(x^2+y^2+k^2)}{2} - \dfrac{C'Ex^2y^2k^2}{6A}\right\}, \end{cases}$$

$$(37\,a)\quad \text{falls: } k = \frac{x\sqrt{A(A + Cy^2 + Ey^4)} - y\sqrt{A(A + Cx^2 + Ex^4)}}{A - Ex^2y^2}.$$

So gelangt *Euler* zur Lösung der analogen Aufgaben wie zuvor bei der Parabel. Auch zeigt er, wie man zu einem gegebenen Ellipsenbogen einen anderen findet, der doppelt oder halb so gross ist, wie man einen Bogen, z. B. die halbe Peripherie, in zwei Teile zerlegen kann, deren Differenz geometrisch ausdrückbar ist, u. s. w.

Während die Bestimmung der Bogenlänge von Ellipse und Hyperbel auf elliptische Integrale führt, erfordert die gleiche Aufgabe bei der Parabel nur Logarithmen. *M. Azzarelli*[265]) gelangte in folgender Weise zu Parabelbögen, deren Differenz durch die Länge einer leicht konstruierbaren Geraden dargestellt werden kann: Auf einer Asymptote einer gleichseitigen Hyperbel nahm er drei Punkte C_1, C, C_2 der Art an, dass der Abstand des Punktes C vom Kurvenmittelpunkt O das geometrische Mittel ist zwischen OC_1 und OC_2; alsdann konstruiert er eine Parabel, deren Parameter so gross wie die Hauptaxe der Hyperbel ist, während Scheiteltangente und Axe bezw. mit Neben- und Hauptaxe der Hyperbel zusammenfallen. Schneiden die in C_1, C, C_2 auf der Asymptote errichteten Lote die Hyperbel in N_1, N, N_2, so treffen die durch diese Punkte zur Hauptaxe parallel gezogenen Geraden die Parabel in Punkten M_1, M, M_2, und die Differenz der Bögen M_2M und MM_1 ist alsdann durch eine Gerade darstellbar. *J. Griffiths*[266])

264) Petrop. Novi Comm. 7, p. 3—48. Diese Arbeit findet sich a. a. O. in verkehrter Reihenfolge vor der soeben [263]) erwähnten. Vgl. auch p. 128—162, wo u. a. die Aufgabe gelöst wird, die ganze Peripherie in drei gleiche Teile zu teilen; ferner Petrop. Acta, Jahrg. 1781, pars posterior (gedruckt 1785), p. 23—44. Viele der von *Euler* gefundenen Resultate leitet *Legendre* ab, Paris Hist., Jahrg. 1786 (gedruckt 1788), p. 676; vgl. noch dessen „Exercices du calcul intégral", 1, Paris 1811, p. 44—52, sowie „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes", 1, Paris 1825, p. 45—53, wo die Aufgabe gelöst wird, zu zwei Ellipsenbögen einen dritten zu finden, der gleich ihrer Summe ist, oder einen Bogen zu bestimmen, der zu einem anderen in gegebenem rationalem Verhältnis steht.

265) Rom Lincei Atti nuovi 24 (1871), p. 347 ff.; in etwas anderer Weise ebenda 25 (1872), p. 430—433.

266) Lond. math. soc. Proc. 5 (1874), p. 95 f.

gelangte von Ellipsenbögen, deren Differenz durch eine leicht zu konstruierende Gerade darstellbar ist, zu eben solchen Hyperbelbögen, indem er für beide Kurven die Hauptaxen ihrer Grösse und Lage nach zusammenfallen liess und die Länge der halben Hauptaxe sowie das Produkt der Exzentrizitäten gleich 1 annahm.

Chasles[267]) nannte die Bögen, deren Differenz durch eine Gerade darstellbar ist, *ähnlich* (semblables); bei *E. de Jonquières*[268]) findet sich die Bezeichnung *arcs associés*, *Th. Reye*[269]) nennt solche Bögen *vergleichbar* und bezeichnet als Pol eines Bogens den Schnittpunkt S der in seinen Endpunkten M, N gezogenen Tangenten, als Schenkel des Bogens die Strecken SM, SN dieser Tangenten. Nach *Chasles* liegen die Pole vergleichbarer Bögen auf einem Kegelschnitt, der mit dem gegebenen die Brennpunkte gemeinsam hat; auch ist die Differenz solcher Bogenlängen gleich der Differenz der zugehörigen Schenkelsummen[270]). (Näheres Nr. **69**.)

43. Untersuchungen von Legendre und Talbot. Bei diesen Autoren tritt die rein geometrische Behandlungsweise der Rektifikation zurück. Für die Länge des von 0 bis t gehenden Bogens der Ellipse $x = a \sin t$, $y = b \cos t$ stellt *Legendre* das Integral auf[271])

$$\int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} \cdot dt = a \cdot E(\varepsilon, t). \tag{38}$$

Hiervon ausgehend bewies er zahlreiche der von *Euler* erhaltenen Resultate und fand mehrere neue. Indem er z. B. eine Ellipse und eine Hyperbel betrachtete, bei der die Brennpunkte der einen Kurve Scheitel der anderen sind, erhielt er zu zwei vergleichbaren Ellipsenbögen MK, KN zwei Hyperbelbögen von derselben Eigenschaft[272]).

267) Par. C. R. 17 (1843), p. 838—844.

268) „Mélanges de géom. pure", Paris 1856, p. 55.

269) Zürich. Viert. 41 (1895), p. 70—75 oder „Geom. d. Lage", p. 182 f.

270) A. a. O. ohne Beweis. *E. de Jonquières* hat a. a. O. [268]) p. 55—98 die Sätze von *Chasles* bewiesen, doch sind seine Beweise zum Teil unkorrekt, er fasst z. B. den Begriff der arcs semblables zu allgemein. *Azzarelli*, Rom Lincei Atti nuovi 24 (1871), p. 339 f. und 346 f. gab einen Beweis des oben erwähnten Satzes über den Ort der Schnittpunkte S ausgehend von $x = a \sin \varphi$, $y = b \cos \varphi$ bezw. $x = \frac{a}{\cos \varphi}$, $y = b \operatorname{tg} \varphi$. Er zeigte ferner, dass bei zwei in den Scheiteln B, A beginnenden vergleichbaren Bögen BP, AQ das Produkt der zu P und Q gehörigen Krümmungsradien konstant gleich ab ist, das Produkt der bis zum Schnitt mit der Hauptaxe gemessenen Normalen gleich $\frac{b^3}{a}$. Auch *Reye* [269]) hat die Sätze von *Chasles* bewiesen.

271) Par. Hist. Jahrg. 1786 (gedruckt 1788), p. 617.

272) Ebenda p. 634—637.

Ferner fand er ein gewisses System unendlich vieler Ellipsen, deren Exzentrizitäten einem bestimmten Gesetz unterliegen, während ihre Hauptaxen gleich sind, von solcher Beschaffenheit, dass die Rektifikation irgend zweier dieser Kurven zwischen gewissen Integrationsgrenzen unmittelbar zur Rektifikation aller übrigen führt[273]).

H. F. Talbot gewinnt einige interessante Sätze über die Bogenlänge von Kegelschnitten, indem er für verschiedene spezielle Fälle die folgende allgemeine Aufgabe löst[274]): Es sei gegeben $\int_0^u \varphi(u) \cdot du$ und man soll nun eine Gleichung finden, deren Wurzeln $u, v, w, \ldots$ von solcher Beschaffenheit sind, dass

$$\int_0^u \varphi(u) \cdot du + \int_0^v \varphi(v) \cdot dv + \int_0^w \varphi(w) \cdot dw + \cdots$$

eine algebraische Funktion von $u, v, w, \ldots$ wird („an algebraic sum" sagt *Talbot*; in seinen Beispielen ist diese algebraische Summe meist eine Konstante, mitunter auch eine rationale oder irrationale Funktion einfachster Art). So zeigt er z. B., dass, wenn die Abscissen dreier Punkte der Parabel $2y = x^2$ Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - rx^2 + (\tfrac{r^2}{4} + 1)\, x - r = 0$$

sind, die algebraische Summe der zugehörigen Bogenlängen verschwindet. Sind die Abscissen dreier Punkte einer Ellipse, bei der die halbe Hauptaxe gleich 1, die numerische Exzentrizität ε ist, Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + rx^2 + (\tfrac{1-\varepsilon^2}{4} r^2 - 1)\, x - r = 0,$$

so wird die algebraische Summe der zugehörigen Bögen gleich $2q - \varepsilon^2 r$, wo q die Länge des Ellipsenquadranten bedeutet.

44. Reihenentwickelungen. Unter den Reihenentwickelungen für die Bogenlänge der Ellipse sei zunächst die bekannteste, von

273) Ebenda, p. 653—659.

274) London Trans., Jahrg. 1836, p. 177—215; Jahrg. 1837, p. 1—18. Bemerkenswert ist die nahe Beziehung obiger Aufgabe zum *Abel*'schen Theorem (II B 2, Nr. **41**). *Talbot* erwähnt, dass er seine Untersuchungen nahezu vollendet hatte, als ihm das *Abel*'sche Theorem bekannt wurde; er denkt hier jedenfalls an *N. H. Abel*'s Abhandlungen in J. f. Math. 3, p. 313 ff. und 4, p. 200 f. = Oeuvres publ. par *L. Sylow* et *S. Lie* 1, p. 444 ff. bezw. p. 515 ff., während ihm *Abel*'s Preisschrift noch unbekannt sein musste, da diese zwar 1826 der Pariser Akademie eingereicht, aber erst 1841 in deren Mém. prés. par divers savants 7, p. 176 ff. = Oeuvres 1, p. 145 ff. veröffentlicht wurde. Vgl. auch *J. W. Lubbock*, Phil. mag. 6 (1835), p. 116—125.

Euler[275]) gegebene Reihe für den Quadranten q angeführt, die nach Potenzen der numerischen Exzentrizität ε fortschreitet, nämlich

$$(39)\quad q = \frac{a\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\varepsilon^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\varepsilon^6 - \cdots\right\};$$

aus ihr gewinnt er noch andere, die nach Potenzen des Axenverhältnisses fortschreiten. Mit Hülfe der Entwickelung von $\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\varphi}$ nach den Kosinus der Vielfachen von φ erhält *J. Ivory* für den Quadranten eine stärker konvergierende Reihe, die nach Potenzen von $e = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ angeordnet ist[276]). Zur Bestimmung der Länge beliebiger Ellipsenbögen gab *Legendre* Reihen, und zwar getrennt für die Fälle einer Kurve mit geringer und einer Kurve mit grosser Exzentrizität[277]).

Kurze Näherungsformeln für die Peripherie $4q$ einer Ellipse gab *G. Peano;* er zeigte z. B., dass $4q$ in grosser Annäherung gleich $\pi\left\{a+b+\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\right\}$ ist, und zu demselben Resultate gelangte *J. Boussinesq*[278]).

E. Apparate zum Zeichnen der Kegelschnitte.

45. Apparate zum Zeichnen der Kegelschnitte. Was zunächst die *Ellipse* betrifft, so sind die meisten Apparate zum Zeichnen dieser Kurve auf den Satz [IV 3, Nr. **11, 12**] gegründet, dass, wenn ein Kreis k' in einem anderen k von doppelt so grossem Radius rollt ohne zu gleiten, jeder mit dem rollenden Kreis k' fest verbundene Punkt eine Ellipse beschreibt, die für Punkte der Peripherie von k' in einen doppelt zu zählenden Durchmesser von k übergeht. Diese cyklische Erzeugung einer Ellipse findet sich zuerst bei *Ph. de la Hire*[279]). Eine zweite

275) „Animadversiones in rectificationem ellipsis", in „Conjectura physica circa propagationem soni ac luminis una cum aliis dissertationibus analyticis", Berlin 1750, p. 121—166 (in Bd. 2 der Opuscula varii argumenti). Vgl. ferner Petrop. Acta pro anno 1780, pars post. p. 7.

276) Edinburgh Trans. 4 (1796), p. 177—180. Ferner *W. Wallace* ebenda 5 (1802), p. 279 ff.; auch hier wird eine unendliche Reihe abgeleitet und zum Beweis des Satzes von *Fagnano* (Nr. 42) benutzt.

277) Par. Hist., Jahrg. 1786 (gedruckt 1788), p. 618—625.

278) *Peano,* „Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale", Torino 1887, p. 232 ff.; Par. C. R. 109 (1889), p. 960 f.; *Boussinesq*, Par. C. R. 108 (1889), p. 696 f.

279) Par. Hist., Jahrg. 1706, Mém. de math. et de phys. (gedruckt 1707), p. 350 — 352. Die obige Geradführung hat übrigens schon der persische

Erzeugungsweise, die bei Ellipsographen verwendet wurde, erwähnt *Proclus* (410—485). Hiernach beschreibt jeder Punkt einer Strecke, die mit ihren Endpunkten auf zwei festen Geraden fortrückt, eine Ellipse[280]); *F. van Schooten* erweiterte diese Erzeugung, indem er den beschreibenden Punkt nur in fester Verbindung mit der beweglichen Strecke annahm[281]). Auch giebt er noch eine andere Ellipsenerzeugung an, die darin besteht, dass der eine Endpunkt A einer Geraden AB von der Länge l einen Kreis k vom Radius l beschreibt, während der andere Endpunkt B auf einem Durchmesser des Kreises fortrückt. Irgend ein mit AB fest verbundener Punkt P beschreibt alsdann eine Ellipse, die in eine durch den Mittelpunkt von k gehende Gerade übergeht, falls $AP = AB$ ist.

Die kinematische Zusammengehörigkeit der zwei im vorstehenden zuerst erwähnten Ellipsenerzeugungen erkannte *G. Suardi*[282]); dass auch die zweite und dritte zusammengehören, hat wohl *F. van Schooten*

Astronom *Nasîr Eddîn Attûsî* (1201—1274), wie *M. Curtze*, Bibl. math., Jahrg. 1895, p. 33 f. bemerkte; alsdann fand sie, vermutlich selbständig, *N. Coppernicus*, „De revolutionibus orbium coelestium", Norimb. 1543, Buch 3, Kap. 4, in der Säkularausgabe von 1873 p. 166. Übrigens wurde sie als Coppernicanische Entdeckung zuerst von *G. J. Rheticus* veröffentlicht, dem *Coppernicus* sein Manuskript gegeben hatte mit dem Wunsche, *Rheticus* möge in einer „Narratio prima" (Wittenberg 1540) auf das Hauptwerk vorbereiten (p. 472 der eben genannten Säkularausg.). Meist wird diese Geradführung fälschlich *H. Cardano* zugeschrieben, der in seinem 1572 geschriebenen „Exaereton mathematicorum", prop. 173 nachweist, wie man einen Kreis der Art um seinen Mittelpunkt bewegen kann, dass jeder Punkt seiner Peripherie eine Gerade beschreibt. Er lässt zu dem Zweck den Mittelpunkt des Kreises auf der Peripherie eines gleich grossen festen Kreises fortrücken und zugleich den beweglichen Kreis mit doppelt so grosser Geschwindigkeit, aber in einem der Bewegung des Mittelpunktes entgegengesetzten Sinn um seinen eigenen Mittelpunkt rotieren (vgl. Cardani operum, Tom. IV, Lugd. 1663, p. 560). Die Entdeckung dieser Geradführung rührt übrigens, wie *Cardano* angiebt, von *L. Ferrari* her, der aber ihre thatsächliche Richtigkeit nicht beweisen konnte. Die zuerst erwähnte Geradführung findet man später noch bei *A. Tacquet*, „De circulorum volutione per planum dissertatio physicomathematica", Antwerpen 1651, dann bei *De la Hire* (1694), Par. mém. depuis 1666 jusqu'à 1699, tome 9, p. 389 (gedruckt 1730). Vgl. *C. le Paige*, Bibl. math., Jahrg. 1887, p. 109 und *M. Curtze*, ebenda Jahrg. 1888, p. 65 f.

280) „Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii", hrsgg. von. *G. Friedlein*, Leipzig 1873, p. 106.

281) „De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus", Lugd. 1646.

282) „Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne", Brescia 1752.

schon bemerkt[283]). Auf die nähere Beschaffenheit der zahlreichen Ellipsographen einzugehen, die auf Grund einer der erwähnten Erzeugungsweisen konstruiert wurden, versagt uns der zur Verfügung stehende Raum. Wir verweisen vielmehr auf Abhandlungen von *T. Rittershaus*[283]), *E. Fischer*[284]) und *A. von Braunmühl*[285]), sowie auf den von *W. von Dyck* herausgegebenen „Katalog mathematischer Modelle“[286]). Einige Ellipsographen wurden auch konstruiert unter Verwendung des Satzes von der konstanten Summe der Brennstrahlen[287]).

Ein mechanisches Instrument zum Zeichnen der *Parabel* hatte schon im 6. Jahrhundert nach Chr. *Isidorus von Milet* angegeben; dasselbe hatte wahrscheinlich folgende Einrichtung: Der Schenkel QR eines rechten Winkels QRS gleitet an einer Geraden (Direktrix der Parabel) hin; an einem Punkte S des anderen Schenkels ist das eine Ende eines Fadens von der Länge RS befestigt, dessen zweites Ende sich im Brennpunkt F der Parabel befindet. Wird der Faden durch Andrücken an RS mit Hülfe des Zeichenstiftes P gespannt erhalten, während QR an der Direktrix gleitet, so beschreibt P eine Parabel[288]).

Was die *Hyperbel* betrifft, so hat *Guido Ubaldo del Monte* (1545—1607) ein Instrument angegeben, das die Kurve mit Hülfe der Brennpunkte und der konstanten Differenz der Brennstrahlen erzeugt, und ähnlich verfährt *F. van Schooten*[289]). Einen speziell zum Zeichnen

---

283) Nach *T. Rittershaus* (Verh. d. Vereins z. Beförd. d. Gewerbfleisses in Preussen 54, Jahrg. 1874, Berlin 1875, p. 274) hat *Jopling* in Mechanics magazine 9 (1820), p. 216 erkannt, dass die drei oben erwähnten Erzeugungen kinematisch zusammengehören.

284) *Dingler*'s Polyt. J. 255 (1885), p. 267—274; daselbst noch weitere Litteraturangaben.

285) In dem von *W. v. Dyck* hrsgg. „Katalog math. Modelle“, München 1892, p. 55—88.

286) P. 227—230, 341—343. Nachtrag zum Katalog, München 1893, p. 42—48.

287) Einen solchen Apparat giebt z. B. *van Schooten* in seiner „Organica sectionum conicarum descriptio“ (Buch 4 seiner „Exercitationes mathematicae“, Leyden 1657); im wesentlichen damit übereinstimmend sind Apparate, die von *D. Sidersky,* Arch. Math. Phys. 65 (1880), p. 420—422 und *K. Jost,* Wien. Ber. 95 (1886), p. 251 f. angegeben wurden. Vgl. auch Fussnote 6.

288) *Eutokius* erwähnt, das Instrument habe die Gestalt eines λ gehabt („Commentarii Eutocii Ascalonitae in librum secundum Archimedis de sphaera et cylindro“, Basil. 1544, p. 21). Andere Instrumente speziell zum Zeichnen der Parabel haben z. B. *K. A. Mayer* (Nachtrag zum Katalog math. Modelle, München 1893, p. 48) und *R. Inwards* (Phil. Mag. (5) 34 (1892), p. 57 ff.) gegeben.

289) Vgl. *von Braunmühl* a. a. O. [285]) p. 65 f. und 69 f.

von gleichseitigen Hyperbeln dienlichen Apparat hat *H. Cunynghame*[290]) erdacht.

Endlich wären noch Apparate zu erwähnen, die je nach ihrer Einstellung irgend einen der drei Kegelschnitte zu zeichnen gestatten. Hier kommen besonders solche Instrumente in Betracht, die die Kurve als Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene erzeugen. Arabische Mathematiker des 10.—12. Jahrhunderts haben derartige Instrumente angegeben, ferner *F. Barozzi* in einem 1586 erschienenen Buch über Asymptoten sowie *B. Bramer*[291]). Aus neuerer Zeit ist zu erwähnen der Kegelschnittzirkel von *C. Hildebrandt,* der auf dem *Dandelin*'schen Satze (Nr. 5) beruht[292]). *W. Jürges*[293]) hat einen Mechanismus konstruiert zum Zeichnen eines Kegelschnitts, der durch 5 Punkte oder durch 4 Punkte und die Tangente in einem derselben gegeben ist. Er benutzte dabei den Satz von der Konstanz des Doppelverhältnisses der Verbindungslinien von vier festen Punkten der Kurve mit einem beliebigen fünften Kurvenpunkte (Nr. 6).

Vgl. zu dieser Nummer auch *E. Papperitz* in III A 6, Anhang.

II. Kegelschnittsysteme.

A. Kegelschnittbüschel.

46. Schnittpunkte und gemeinsames Poldreieck zweier Kegelschnitte. Sind

$$(40)\quad f(x,x) \equiv \sum_1^3 \sum_1^3{}_{i,k} a_{ik}x_ix_k = 0 \text{ und } g(x,x) \equiv \sum_1^3 \sum_1^3{}_{i,k} b_{ik}x_ix_k = 0$$
$$(a_{ik} = a_{ki},\ b_{ik} = b_{ki})$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte, so stellt $\lambda g(x,x) - f(x,x) = 0$ entsprechend den unendlich vielen Werten, die man dem Parameter λ erteilen kann, ein ganzes System von Kegelschnitten, ein sogenanntes *Kegelschnittbüschel* (lineares Kegelschnittsystem erster Stufe) dar, und alle Kurven dieses Büschels gehen durch die Schnittpunkte von $f(x,x) = 0$ und $g(x,x) = 0$, die Grundpunkte des Büschels, hin-

290) Phil. Mag. (5) 22 (1886), p. 138 f.

291) Näheres bei *v. Braunmühl* a. a. O. [285]) p. 59—61, 63 f., 70 f.; Zeitsch. Math. Phys. 35 (1890), hist.-litt. Abt., p. 161—165.

292) Ausführlich beschrieben von *E. Fischer,* Dingler's Polyt. J. 282 (1891), p. 242 ff. und Bd. 287 (1892), p. 246 ff.; Katalog math. Modelle, hrsgg. von *v. Dyck,* München 1892, p. 229.

293) Zeitsch. Math. Phys. 38 (1893), p. 350—356.

durch[294]). Offenbar lässt sich λ linear so bestimmen, dass $\lambda g - f = 0$ durch irgend einen willkürlich aber bestimmt gewählten Punkt der Ebene hindurchgeht; ist diese Bestimmung von λ erfolgt, so stellt $\lambda g - f = 0$ einen ganz bestimmten Kegelschnitt dar, und da eine C_2 durch fünf Punkte bestimmt ist (Nr. 6), können wir vermuten, dass die Kurven des Büschels *vier* Punkte gemeinsam haben[295]). *C. G. J. Jacobi* zeigte, dass es vier Werte $x_1 : x_2 : x_3$ giebt, die den beiden Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ genügen, indem er *drei* Geradenpaare bestimmte, die durch die Schnittpunkte gehen, deren Zahl also vier beträgt; drei dieser Geraden treffen sich immer in einem der zu bestimmenden vier Punkte[296]). Die Doppelpunkte der drei Geradenpaare sind die Ecken des den zwei Kurven und somit allen Kurven des Büschels gemeinsamen Poldreiecks. *A. Clebsch* bildete einen Ausdruck, der in den Linienkoordinaten vom 4. Grad ist und gleich Null gesetzt die vier Schnittpunkte darstellt[297]). *S. Aronhold* dachte sich die Gleichungen der zwei Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Poldreieck bezogen; man erhält dann leicht Ausdrücke, die in den Koordinaten der Schnittpunkte linear sind[298]).

Besondere Beziehungen finden zwischen den vier Schnittpunkten zweier Kegelschnitte im allgemeinen nicht statt[299]); umgekehrt können vier beliebig gewählte Punkte im allgemeinen als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels angesehen werden[300]).

Die Schnittpunkte von $f = 0$ und $g = 0$ sind entweder alle reell, oder nur zwei derselben, oder sie sind alle imaginär. Diese Realitäts-

---

294) Die Ausdrücke Kurvenbüschel und Grundpunkte rühren von *Steiner*, J. f. Math. 47 (1848), p. 1 = Berl. Monatsb. Jahrg. 1848, p. 311 = Werke 2, p. 495. Im Englischen heisst Büschel pencil, franz. faisceau ponctuel, ital. fascio.

295) *G. Lamé*, Ann. de math. 7 (1816), p. 231 f. und „Examen des diff. méth. . . .“, Paris 1818, p. 32 f. findet als Kriterium dafür, dass drei Kegelschnitte $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$, $h(x, x) = 0$ durch dieselben vier Punkte gehen $h(x, x) \equiv \lambda_1 f(x, x) + \lambda_2 g(x, x)$.

296) J. f. Math. 14 (1835), p. 286—288 = Werke 3, p. 292 ff.

297) J. f. Math. 59 (1860), p. 32. Vgl. auch *Hesse*, 7 Vorl., p. 6 = Zeitsch. Math. Phys. 19 (1873), p. 6; „Vorl. über anal. Geom. d. Raumes“, 3. Aufl. Leipzig 1876, p. 111 f.

298) J. f. Math. 62 (1863), p. 317—320, sowie 328—330; *Hesse*, Zeitsch. Math. Phys. 21 (1876), p. 14—24; *Gundelfinger*, Vorl., p. 132—141.

299) Eine Ausnahme tritt z. B. ein bei gleichseitigen Hyperbeln: solche schneiden sich in vier Punkten, bei denen immer einer der Höhenschnittpunkt des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks ist (Nr. **50**).

300) *Chr. Wiener*, Math. Ann. 3 (1869), p. 13 beweist: Damit n *willkürliche* Punkte der Ebene als die gesamten Schnittpunkte zweier algebraischen Kurven angesehen werden können, muss n einen der Werte 1, 2, 4 haben.

verhältnisse stehen in enger Beziehung zu der Gleichung 3. Grades $C(\lambda)=0$, die die Parameterwerte der drei in dem Büschel $\lambda g - f = 0$ enthaltenen Geradenpaare liefert[301]); *J. J. Sylvester* hat diesen Zusammenhang näher angegeben[302]). Tiefer gehende Kriterien für die Realität der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte hat *K. Kemmer* aufgestellt; auch *W. E. Story* behandelt den Gegenstand sehr ausführlich, giebt aber ziemlich komplizierte Kriterien[303]). Besonders einfache Kriterien hat *Gundelfinger* gegeben[304]).

Noch sei erwähnt, dass auch die Kegelschnitte, die durch k gegebene Punkte gehen ($k = 0, 1, 2, 3$) und $4 - k$ gegebene Punktepaare zu Paaren konjugierter Pole haben, ein Büschel bilden, denn diese vier Bedingungen sind in den Koeffizienten der Gleichung einer C_2 linear. *P. Serret* zeigte, wie man die Grundpunkte dieser Büschel erhält[305]). — Da ein Strahlenbüschel und ein Kegelschnittbüschel

301) Schon *Lamé,* „Examen des diff. méth. . . .", p. 71 erwähnt diese Gleichung; *Plücker,* Anal. Entw. 1, p. 241 giebt sie in entwickelter Form.

302) Cambr. Dubl. Math. J. 5 (1850), p. 262—280; 6 (1850), p. 18—20. Im Falle von vier reellen Schnittpunkten sind die drei Geradenpaare des Büschels und somit auch das gemeinsame Poldreieck Δ reell. Sind alle Schnittpunkte imaginär, so ist nur ein Geradenpaar reell, aber Δ wieder reell. Im Falle von nur zwei imaginären Schnittpunkten ist nur ein Geradenpaar, aber auch nur eine Ecke des Poldreiecks nebst ihrer Gegenseite reell; hier hat $C(\lambda) = 0$ zwei komplexe Wurzeln. Auch für die zwei anderen vorerwähnten Fälle drückt *Sylvester* die Kriterien durch die Wurzeln von $C(\lambda) = 0$ aus. Im Falle einer Doppelwurzel berühren sich die Kurven des Büschels in einem und demselben Punkte und schneiden sich in zwei anderen Punkten, oder es findet doppelte Berührung statt, je nachdem die der Doppelwurzel entsprechende ausartende C_2 aus zwei verschiedenen Geraden oder aus einer Doppelgeraden besteht. Analog findet im Falle einer dreifachen Wurzel dreipunktige Berührung (Oskulation) oder vierpunktige Berührung statt. Vgl. auch *Gundelfinger,* Vorl. p. 133—137. Auf synthetischem Wege gelangte *v. Staudt* zu diesen Fällen („Geom. d. Lage", Nürnberg 1847, p. 171 f.); vgl. ferner *Chr. Paulus,* „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie", Stuttgart 1853, p. 220—241.

303) *Kemmer,* Diss. inaug. Giessen 1878; *Story,* Amer. J. 6 (1884), p. 225—234; vgl. noch *J. Versluys,* Arch. Math. Phys. 52 (1870), p. 389—397; *E. Amigues,* Nouv. ann. (3) 13 (1894), p. 81—91.

304) Vorl., p. 371—376. Hiernach muss im Falle vier verschiedener Schnittpunkte ein gewisser Kegelschnitt $\psi(x, x) = 0$, der eine Kombinante des Büschels darstellt, eine nicht verschwindende Diskriminante haben; ist hierbei ψ eine imaginäre Kurve, so sind die vier Schnittpunke reell, und wenn ψ reell ist, hat man je nach dem Vorzeichen der Diskriminante 2 oder 4 imaginäre Schnittpunkte. Dem Zerfallen von ψ entsprechen die verschiedenen Fälle der Berührung; ausserdem spielen hierbei noch die Koeffizienten der *Hesse*'schen Kovariante von $C(\lambda)$ eine gewisse Rolle (vgl. auch Nr. 88).

305) „Géom. de direction", Par. 1869, p. 175—177; wirklich ausgeführt sind (ebenda, p. 464 ff.) nur die dual entsprechenden Konstruktionen. Für $k = 0$ vgl.

gleiche Mächtigkeit besitzen, liegt der Gedanke nahe, dieses aus dem erstgenannten unmittelbar hervorgehen zu lassen. *Steiner* hat diesen Gedanken synthetisch durchgeführt („projektive Drehung“)[306]).

47. Desargues-Sturm'scher Satz. Die Punktepaare, in denen ein beliebiger Kegelschnitt und die zwei Paare von Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks von einer beliebigen Geraden getroffen werden, bilden, wie *G. Desargues* bemerkte, eine Involution[307]). *Ch. Sturm* erweiterte den Satz dahin, dass überhaupt drei beliebige einem Viereck umschriebene Kegelschnitte von irgend einer Transversalen in Punktepaaren einer Involution getroffen werden[308]). Es bestimmen somit die C_2 eines Büschels auf einer beliebigen Geraden eine Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte derjenigen zwei Kurven des Büschels sind, die die Gerade zur Tangente haben[309]).

---

auch *Hesse*, J. f. Math. 20 (1840), p. 293 = Werke, p. 32f., für die allgemeineren Fälle Nr. 84, sowie *H. Picquet*, „Étude géometr. des systèmes ponctuels et tangentiels“, Paris 1872, p. 10—16. Natürlich bilden auch die Kegelschnitte, die ein gegebenes Dreieck zum Poldreieck haben und durch einen festen Punkt gehen, ein Büschel.

306) *Steiner-Schröter*, § 39. Eigentlich ist die projektive Drehung nur eine quadratische Transformation [III C 10], vermöge deren eine Gerade in einen dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kegelschnitt übergeführt wird. Zur Konstruktion von Kegelschnittbüscheln vgl. auch *F. Bergmann*, Arch. Math. Phys. 67 (1881), p. 177—190, sowie *Chr. Wiener*, „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“ 1, Leipzig 1884, 6. Abschn., Kap. 14 und 15.

307) „Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan“, Paris 1639, in Oeuvres de Desargues réun. et anal. par Poudra 1, Paris 1864, p. 188. Der Satz von *Desargues* ist übrigens nur eine Verallgemeinerung eines Satzes von *Pappus*, bei dem an Stelle des Kegelschnitts das Diagonalenpaar des Vierecks vorhanden ist (Collectionis quae supersunt, ed. *Hultsch*, Buch 7, prop. 130, Bd. 2, p. 873—875).

308) Ann. de math. 17 (1826), p. 180. Vgl. noch *Chr. Wiener*, Zeitsch. Math. Phys. 9 (1864), p. 47—49; *C. Hossfeld*, Zeitsch. Math. Phys. 28 (1883), p. 51—53; *D. Montesano*, Giorn. di mat. 23 (1885), p. 287; *C. Segre*, Tor. Atti (2) 38, 1886; *A. del Re*, Giorn. di mat. 28 (1890), p. 260f.; *Steiner-Schröter*, p. 223.

309) *Zwei* solche Kurven sind im Büschel, denn die zu $\lambda g - f = 0$ gehörige Gleichung in Linienkoordinaten ist in λ vom 2. Grad. Schon *Newton* war es bekannt, dass es zwei Kegelschnitte giebt, die durch vier gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade berühren („Philosophiae naturalis principia mathematica“, Buch 1, prop. 23 = Opera, hrsgg. von *S. Horsley* 2, p. 104 ff. = deutsche Übers. von *J. Ph. Wolfers*, Berlin 1872, p. 100. *G. Scheffers* bewies Leipz. Ber. 44 (1892), p. 269—278 den von *S. Lie* vermuteten Satz, dass zwei kontinuierliche Scharen von ∞^1 Kurven, die irgendwie paarweise aufeinander bezogen sind und von jeder Geraden in Involution getroffen werden, ein Kegelschnittbüschel bilden.

Ed. Weyr gab eine Verallgemeinerung des *Desargues-Sturm*'schen Satzes, indem er zeigte, dass jeder durch zwei Grundpunkte eines Büschels gehende Kegelschnitt von den Büschelkurven in einer krummlinigen Punktinvolution geschnitten wird, deren Zentrum auf der Verbindungslinie der beiden anderen Grundpunkte liegt[310]). Man erhält wieder den früheren Satz, wenn man den Kegelschnitt zerfallen lässt in eine unwesentliche Gerade, die durch die zwei ersten Grundpunkte geht und eine andere Gerade, die die Punktinvolution trägt.

48. v. Staudt'sche Kegelschnitte. Für das Doppelverhältnis der durch eine beliebige Gerade $u_x = 0$ aus $f = 0$ und $g = 0$ ausgeschnittenen Punktepaare erhält man eine in den u_i zum 4. Grad ansteigende Gleichung; alle Geraden, die die zwei Kurven in Punktepaaren von gegebenem Doppelverhältnis schneiden, umhüllen somit eine C^4.[311]) Diese reduziert sich im Fall des harmonischen Verhältnisses auf einen Kegelschnitt H, „die zu f und g gehörige harmonische Kurve 2. Klasse“[312]), deren Bedeutung zuerst wohl *v. Staudt* erkannte; dieselbe hat zu Tangenten die acht Geraden, die die zwei Kurven f und g in ihren gegenseitigen Schnittpunkten berühren[313]). Dual entsprechend besteht der Ort aller Punkte, von denen sich Tangentenpaare gegebenen Doppelverhältnisses δ an f und g legen lassen, aus einer C_4[314]); im Falle $\delta = -1$ reduziert sich diese auf die „harmonische Kurve 2. Ordnung“ χ, die auch durch die acht Berührungs-

310) Wien. Ber. 58 (1868), p. 223—226. Was das Entstehen einer solchen Involution betrifft, so sei folgendes bemerkt: Auf der Kurve liegen zwei projektive Punktreihen, wenn die Verbindungslinien eines Punktes von k mit den einzelnen Punkten dieser Reihen zwei projektive Strahlenbüschel bilden; sind beide Büschel in Involution, so sagen wir dasselbe auch von den Punktreihen; die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden alsdann ein Strahlenbüschel (vgl. *Chasles*, Sect. con., p. 147).

311) Vgl. z. B. *Gundelfinger* im 3. Suppl. zu seiner Ausg. von *Hesse*, „Vorl. üb. anal. Geom. d. Raumes“, 3. Aufl. (1876), p. 472 f., oder in Vorl., p. 143.

312) Line harmonic conic bei engl. Mathematikern. Sind die Kegelschnitte Kreise, so bilden ihre Mittelpunkte die Brennpunkte von H (*Chasles*, Sect. con., p. 318).

313) *v. Staudt*, „Über die Kurve 2. Ordnung“, Progr. Nürnberg 1831, p. 24 f. Hier wird ein analytischer Beweis der erwähnten Eigenschaft von H gegeben. Vgl. auch Geom. d. Lage, Nürnberg 1847, p. 169, sowie Beiträge z. Geom. d. Lage, 2. Heft, Nürnberg 1857, p. 207 und 253. *Clebsch* gelangt durch symbolische Rechnung zu der Gleichung von H, J. f. Math. 59 (1860), p. 33. Bezüglich der Bedingungen, unter denen H zerfällt, vgl. *Pasch*, Math. Ann. 38 (1890), p. 42—46.

314) *Cayley*, Quart. J. 8 (1867), p. 77—84 = Coll. papers 6, p. 27—34 hat diese C_4 näher untersucht; vgl. auch *Ed. Weyr*, J. f. Math. 75 (1871), p. 71—74.

punkte der den zwei Kegelschnitten gemeinsamen Tangenten geht[315]). Vgl. auch Nr. 57.

49. Polkegelschnitt einer Geraden, Mittelpunktskegelschnitt. Wie *Poncelet* bemerkte, gehen die in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels genommenen Polaren eines beliebig gegebenen Punktes P durch einen und denselben Punkt Q, und umgekehrt gehen die Polaren von Q durch P[316]); beide Punkte heissen konjugiert hinsichtlich der Kurven des Büschels[317]). Durchläuft P eine beliebige Gerade u, so erfüllen die zugehörigen Punkte Q einen Kegelschnitt N, der auch Ort für die in Bezug auf die einzelnen Kurven des Büschels genommenen Pole der Geraden u ist[318]) (Polkegelschnitt der Geraden u) und die Gleichung hat:

$$N \equiv \sum \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2}u_3\right) = 0. \tag{41}$$

Derselbe geht durch die Doppelpunkte der drei Geradenpaare des Büschels sowie durch die vierten harmonischen Punkte zu den Schnittpunkten von u mit irgend einer der sechs Geraden des Büschels und zu den zwei auf der betreffenden Geraden gelegenen Grundpunkten. Hiernach lassen sich sofort neun Punkte von N angeben, infolge dessen N häufig als Kegelschnitt der neun Punkte bezeichnet wird. Übrigens liegen auf N auch die Doppelpunkte der auf u durch die Büschelkurven ausgeschnittenen Involution. Man kann 16 Kegelschnitte angeben, die von N berührt werden; den vier Dreiecken,

---

315) Point harmonic conic bei engl. Mathematikern. Dass die obigen acht Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, bemerkte *v. Staudt* [313]). Vgl. ferner *Steiner*, J. f. Math. 44 (1852), p. 275 f. = Werke 2, p. 427 f., im wesentlichen auch in Nouv. ann. 14 (1855), p. 141 f.; *E. de Jonquières*, Nouv. ann. 15 (1856), p. 94 ff. Dass die Berührungspunkte zweier einem *Dreiseit* eingeschriebenen Kegelschnitte wieder auf einer C_2 liegen, hat *Steiner*, Ann. de math. 19 (1828), p. 3 f. = Werke 1, p. 184 f. gezeigt. Auf die Bedeutung von χ als Invariante machte *G. Salmon*, Cambr. Dubl. math. J. 9 (1854), p. 30 aufmerksam. Die Kurve ist ein Kreis, wenn die zwei Brennpunktepaare von f und g harmonische Punkte eines Kreises sind (*F. H. Siebeck*, J. f. Math. 64 (1864), p. 177).

316) Traité Nr. 388, für Kreisbüschel Nr. 81; Ann. de math. 12 (1822), p. 246 = Appl. d'anal. 2, p. 526. Für den Fall, dass P im Unendlichen liegt, findet sich der Satz schon bei *Lamé*, Ann. de math. 7 (1816), p. 233; „Examen des diff. méth. . . .", Paris 1818, p. 34.

317) *Steiner-Schröter*, p. 283; bei *Poncelet* points réciproques.

318) *Poncelet* a. a. O. Nr. 396 und 370, für Kreise Nr. 84. Verschiedene Formen der Gleichung von N giebt *O. Weimar*, Diss. inaug. Giessen 1890. Vgl. ferner *P. Cassani*, Giorn. di mat. 8 (1870), p. 374—376; *F. Bergmann*, Arch. Math. Phys. 68 (1882), p. 404—420. Bei *Steiner-Schröter*, p. 285 heisst die Kurve (41) der Polarkegelschnitt der Geraden u.

deren jedes drei Grundpunkte des Büschels zu Ecken hat, lassen sich nämlich je vier durch die eben genannten Doppelpunkte gehenden Kegelschnitte einschreiben, wodurch man im ganzen 16 solche Kurven erhält[319]).

Wählt man insbesondere als Gerade u die unendlich ferne Gerade, so wird N der Ort für die Mittelpunkte aller Kurven des Büschels, der Mittelpunktskegelschnitt M; sein Zentrum ist, wie schon *J. F. Pfaff* bekannt war, die gemeinsame Mitte der Geraden, die die Mitten der Diagonalen oder der Gegenseiten des Vierecks verbinden, also der Schwerpunkt der vier Ecken[320]) [III A 2].

50. Die Frage nach den im Büschel enthaltenen Kurvenarten beantwortete zuerst *A. F. Möbius*, und zwar mit Hülfe des barycentrischen Calculs[321]). Unter Voraussetzung reeller Grundpunkte fand er, dass sich durch diese zwei reelle oder zwei imaginäre Parabeln legen lassen, je nachdem jeder der vier Grundpunkte ausserhalb des durch die drei übrigen gebildeten Dreiecks liegt, oder dies nicht der Fall ist. Im ersten Falle bestehen die C_2 des Büschels überdies aus Ellipsen und Hyperbeln, im zweiten nur aus Hyperbeln. Der Mittelpunktskegelschnitt M ist, diesen Fällen entsprechend, eine Hyperbel

---

319) *Steiner,* J. f. Math. 30 (1846), p. 104 f. = Roma Giorn. arcad. Bd. 99 = Werke 2, p. 335 f.; *G. Battaglini,* Napoli Rend. 5 (1862). *E. Beltrami*, Bologna Mem. (2) 2 (1862), p. 366—382 = Opere matem. 1, p. 49—62; Giorn. di mat. 1 (1863), p. 110—116. *Beltrami* zeigte auch, für welche bestimmte Lage der Geraden u der Polkegelschnitt N ein Kreis ist. *P. Cassani*, Giorn. di mat. 7 (1869), p. 369—372. — Geht man umgekehrt von einem Kegelschnitt k durch fünf Punkte aus, so ergiebt sich unmittelbar ein System von 160, k berührenden Kegelschnitten; *W. Fr. Meyer,* Arch. Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 77.

320) Schon 1810 hatte *Pfaff* den Satz aufgestellt, dass die Mittelpunkte der Büschelkurven eine durch die Doppelpunkte der Geradenpaare des Büschels gehende Hyperbel erfüllen, hatte hierbei allerdings nur den Fall eines konvexen Vierecks der Grundpunkte berücksichtigt (Monatl. Korresp. 22 (1810), p. 226). Vgl. auch *Brianchon* und *Poncelet,* Ann. de math. 11 (1821), p. 219 = *Poncelet,* Appl. d'anal. 2, p. 515 f.; *Gergonne* zeigte, dass M durch die Mitten der sechs Seiten des Vierecks geht, Ann. de math. 11 (1821), p. 396—398; *Steiner,* Roma Giorn. arcad. 99 = J. f. Math. 30 (1846), p. 102 f. = Werke 2, p. 334 f.

321) Baryc. Calcul, § 253—254 = Werke 1, p. 325—327. Vgl. auch *Cayley,* Quart. J. 2 (1858), p. 206 f. = Coll. papers 3, p. 136—138, wo noch die Fälle mit imaginären Grundpunkten behandelt werden. Auch die Art eines durch fünf beliebig gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts wird von *Möbius* a. a. O. § 255—257 bestimmt; vgl. hierzu ferner *Chasles,* Sect. con., p. 10; *J. Versluys,* Arch. Math. Phys. 53 (1871), p. 143—146; *Gundelfinger,* Vorl., p. 356—359. Bezüglich der Konstruktion der im Büschel befindlichen Parabeln vgl. *Lamé,* „Examen des diff. méth. . . .", p. 51—53.

bezw. Ellipse[322]); er ist eine Parabel, wenn einer der Grundpunkte im Unendlichen liegt, auch fallen dann die zwei Parabeln des Büschels in eine einzige zusammen. Da M auch durch die Berührungspunkte der unendlich fernen Geraden g_∞ mit den zwei Parabeln geht, folgt, dass die Asymptoten von M zu den Axen dieser Kurven parallel sind. Zu den unendlich fernen Punkten von M liegen nicht nur die unendlich fernen Punkte konjugierter Durchmesser harmonisch (Nr. **11**), sondern nach dem *Desargues-Sturm*'schen Satze auch alle Punktepaare, die aus g_∞ durch die Büschelkurven ausgeschnitten werden. Die Asymptotenpaare dieser Kurven sind daher parallel zu je einem Paar konjugierter Durchmesser von M, und jede Kurve des Büschels besitzt ein zu den Asymptoten von M paralleles Paar konjugierter Durchmesser[323]).

Werden die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels durch die Ecken A, B, C und den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks gebildet, so bestehen die Geradenpaare des Büschels aus je einer Seite und der zugehörigen Höhe. Die auf g_∞ ausgeschnittene Involution ist daher nun eine rechtwinkelige Involution, die Kurven des Büschels sind sämtlich gleichseitige Hyperbeln, während ein beliebiges Kegelschnittbüschel nur eine solche Kurve enthält. Das gemeinsame Poldreieck wird durch die Fusspunkte der Höhen von ABC gebildet[324]).

---

322) *Gergonne* bemerkte, M sei eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem das Viereck der Grundpunkte konvex wäre oder nicht (Ann. de math. 11 (1821), p. 398). Vgl. ferner *Steiner,* J. f. Math. 55 (1858), p. 372 = Werke 2, p. 678 f. Auch hier werden die Fälle mit imaginären Grundpunkten berücksichtigt und überhaupt noch weitere Sätze gegeben. In seinen Vorlesungen (*Steiner-Schröter* § 43) behandelte er die Frage nach der Art der in einem Büschel enthaltenen C_2 durch Untersuchung der auf g_∞ ausgeschnittenen Involution, und zwar unabhängig davon, ob die Grundpunkte reell oder paarweise imaginär sind.

323) *Steiner,* J. f. Math. 2 (1827), p. 64 f. = Werke 1, p. 123 f. Durch die Ecken eines konvexen Vierecks der Grundpunkte geht somit auch eine bestimmte Ellipse e_0, bei der das Paar einander gleicher konjugierter Durchmesser zu den Asymptoten von M parallel ist (vgl. die in Ann. de math. 4 (1814), p. 384 gestellte Aufgabe, sowie die anonym gegebene Darstellung Ann. de math. 5 (1814), p. 88—90). *Steiner* bemerkte, dass die Kurve e_0 hinsichtlich ihrer Gestalt unter allen Kurven des Büschels einem Kreis am nächsten kommt. Einen analytischen Beweis dieser Sätze gab *Gergonne,* Ann. de math. 18 (1827), p. 100—110.

324) *Steiner-Schröter,* p. 254; vgl. auch J. f. Math. 55 (1858), p. 372 f. = Werke 2, p. 679. Dass der Höhenschnittpunkt eines einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks auf dieser Kurve liegt, bewiesen *Brianchon* und *Poncelet* unter Anwendung des *Pascal*'schen Satzes auf ein Sechseck, von dem zwei Ecken die unendlich fernen Punkte der Hyperbel sind (Ann. de math. 11 (1821), p. 205 f. = *Poncelet*, Appl. d'anal. 2, p. 504). Vgl. auch *Cayley*, Phil. mag. (4) 13 (1857), p. 423 = Coll. papers 3, p. 254.

Der Mittelpunktskegelschnitt M muss nun ein Kreis sein und durch die Höhenfusspunkte sowie durch die Mitten der Seiten des Dreiecks und der Höhenabschnitte AH, BH, CH gehen. Er berührt überdies die vier dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreise und wird der *Feuerbach*'sche Kreis des Dreiecks genannt[325]).

Auch die gleichseitigen Hyperbeln, die ein gegebenes Dreieck zum Poldreieck haben, bilden ein Büschel, und zwar sind die Zentren der dem Dreieck eingeschriebenen Kreise dessen Grundpunkte, die Mittelpunktskurve M ist der Umkreis des Dreiecks[326]).

51. Büschel mit einem oder mit unendlich vielen Kreisen. Im allgemeinen ist in einem Kegelschnittbüschel kein Kreis enthalten; damit ein solcher auftrete, müssen die zwei Parabeln des Büschels zueinander rechtwinkelige Axen haben. Der Mittelpunktskegelschnitt ist jetzt eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten

325) Bei engl. Mathematikern nine-point circle. Dass die genannten neun Punkte auf einem Kreis liegen, der zugleich Mittelpunktskurve des Büschels ist, haben *Brianchon* und *Poncelet,* Ann. de math. 11 (1821), p. 212—216 = *Poncelet,* Appl. d'anal. 2, p. 510—513 zuerst bemerkt. Gewisse andere Eigenschaften des durch die Höhenfusspunkte gehenden Kreises wurden von *B. Bevan,* Leybourn's Math. Repository 1 (1804), p. 18 ausgesprochen und von *J. Butterworth,* ebenda 1, p. 143 und *J. Whitley* 1807 bewiesen (vgl. *J. S. Mackay,* Edinb. Proc. 11 (1892), p. 19—57; *J. Lange,* Progr. *Fr. Werder*'sche Ob. Realsch. Berlin 1894; *F. Cajori,* „A history of elementar mathematics", New York 1896, p. 259 f.). *K. W. Feuerbach* scheint zwar bemerkt zu haben, dass die neun Punkte auf einem Kreis liegen, erwähnt aber nur für die Höhenfusspunkte und Seitenmitten die Lage auf einem Kreis; auch bestimmt er dessen Durchmesser (= Radius des Umkreises von ABC) und die Lage seines Mittelpunktes (Mitte zwischen H und dem Centrum M_1 des Umkreises). Der eigentliche Fortschritt der Untersuchungen *Feuerbach*'s gegenüber früheren Autoren besteht im direkten elementaren Beweis des Satzes, dass die vier eingeschriebenen Kreise von ABC obigen Kreis berühren („Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks", Nürnberg 1822, § 54—57, sowie p. 62). Vgl. noch *T. S. Davies*, Phil. mag. 2 (1827), p. 29 f.; *Steiner,* „Die geom. Konstr. . . .", Berlin 1833, Fussnote zu § 12 = Werke 1, p. 491; Ann. de math. 19 (1828), p. 43 f. = Werke 1, p. 195 f.; *N. Trudi,* Giorn. di mat. 1 (1863), p. 29—32. Vgl. noch III A 2 a.

326) *Brianchon* und *Poncelet,* Ann. de math. 11 (1821), p. 210 = *Poncelet,* Appl. d'anal. 2, p. 508 bemerkten zuerst, dass der einem Poldreieck einer gleichseitigen Hyperbel umschriebene Kreis durch den Kurvenmittelpunkt geht. Die beiden, durch obiges Büschel, andererseits durch das Büschel ($ABCH$) bestimmten ein-eindeutigen quadratischen Punkttransformationen sind grundlegend für die Geometrie des Dreiecks (I B 2, Fussnote 383[b] und III A 2 a). — Ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln wird auch von den C_2 gebildet, die durch die vier Brennpunkte eines Kegelschnitts gehen; *Cayley,* Quart. J. 5 (1862), p. 275—280 = Coll. papers 4, p. 505—509 hat das Büschel kurz behandelt, scheint aber nicht bemerkt zu haben, dass es aus konzentrischen gleichseitigen Hyperbeln besteht; vgl. auch *Cazamian,* Nouv. ann. (3) 3 (1894), p. 225.

mit den Axen der Parabeln zusammenfallen; die Kurve wurde von *Chasles* näher betrachtet, der z. B. erkannte, dass sie für jede Büschelkurve die *Apollonische* Hyperbel (Nr. **33**) des Kreismittelpunktes darstellt[327]). Alle Kegelschnitte des Büschels haben nun gleichgerichtete Axen[328]). Ebenso sind die sechs Halbierungslinien der Winkel zwischen den drei Paar Gegenseiten des Vierecks, wie *Poncelet* zeigte, zu je drei den Axen parallel[329]). — Zu den Büscheln, die einen Kreis enthalten, ist auch jenes zu zählen, bei dem der Kreis in ein zirkulares Geradenpaar entartet ist. *M. d'Ocagne* hat mit Hülfe dieses Büschels und der Theorie der reziproken Polaren die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet[330]).

Enthält ein Kegelschnittbüschel zwei Kreise, so besteht es überhaupt nur aus Kreisen, die ausser zwei reellen oder imaginären im Endlichen liegenden Punkten A, B noch das imaginäre Kreispunktepaar gemeinsam haben. Die Gerade AB ist nach *L. Gaultier* Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die sämtliche Kreise des Büschels rechtwinklig schneiden. *Gaultier* nannte diese Gerade axe radical[331]), bei *Steiner* heisst sie *Linie gleicher Potenzen*[332]), bei *Plücker Chor-*

327) J. de math. 3 (1838), p. 410 ff. Vgl. auch *C. Intrigila,* Giorn. di mat. 23 (1884), p. 266; *Steiner-Schröter,* p. 295 f. Weitere Sätze über Büschel obiger Art bei *M. Greiner,* Arch. Math. Phys. 60 (1877), p. 178—184; *S. Kantor,* Wien. Ber. 76 (1877), p. 774—785; ebenda 78 (1878), p. 172—192.

328) Schon 1680 haben *De la Hire* und *Huygens* den Satz ausgesprochen, dass sich zwei Kegelschnitte mit parallelen Axen in vier Punkten eines Kreises schneiden (Oeuvres de *Huygens,* 8, La Haye 1899, p. 284—289). Vgl. noch Ann. de math. 5 (1814), p. 88—90, anonym. — *O. Terquem*, J. de math. 3 (1838), p. 17 bezeichnete als lignes conjointes jedes Geradenpaar von der Beschaffenheit, dass, wenn es zu Koordinatenaxen x, y gewählt wird, in der Gleichung eines Kegelschnitts k die Koeffizienten von x^2 und y^2 einander gleich sind. Solche Geraden schneiden k in vier Punkten eines Kreises, und auch die Umkehrung gilt. *Chasles* benutzte diese Geradenpaare, J. de math. 3 (1838), p. 385—431, bei rein geometrischen Betrachtungen über Kegelschnitte und Systeme von solchen.

329) Traité Nr. 394; *Steiner,* J. f. Math. 2 (1827), p. 97 = Werke 1, p. 128; J. f. Math. 55 (1858), p. 359 = Werke 2, p. 665 f. Es folgt noch, dass ein Kreissystem, das mit einem Kegelschnitt ein Sehnensystem von gleicher Richtung bestimmt, noch ein zweites derartiges Sehnensystem bestimmt, das bezüglich der Axen zum ersten symmetrisch liegt (*Em. Weyr,* Wien. Ber. 57 (1868), p. 453).

330) Nouv. ann. (3) 14 (1895), p. 353—364, bereits 1887 der Soc. math. zu Edinburgh mitgeteilt.

331) J. éc. polyt. 9, cah. 16 (1813), p. 139 und 147 ff.

332) J. f. Math. 1 (1826), p. 165 = Werke 1, p. 23 = Ostw. Klass. Nr. 123, p. 8. Weitere Ausführungen ebenda, p. 164—168, bezw. 22—26, bezw. 7—13. Vgl. auch *F. Sarrus,* Ann. de math. 16 (1826), p. 379.

dale[333]). Dass die von einem Punkt dieser Geraden an zwei Kreise des Büschels gezogenen Tangenten gleich lang sind, war wohl schon arabischen Mathematikern um 1000 n. Chr. bekannt[334]). Der unendlich ferne Punkt von AB ist eine Ecke des gemeinsamen Poldreiecks des Büschels, während die Gegenseite durch die gemeinsame Zentrale der Kreise gebildet wird; die auf ihr gelegenen Ecken sind die Doppelpunkte der auf der Zentrale durch die Kreise ausgeschnittenen Involution, zugleich die Doppelpunkte zweier dem Büschel angehörigen zirkularen Geradenpaare, die *Grenzpunkte*[335]). (Das dritte, reelle Geradenpaar wird durch AB und g_∞ gebildet.) Die Grenzpunkte sind imaginär oder reell, je nachdem A und B reell oder imaginär sind; sie sind überdies Grundpunkte für das Büschel derjenigen Kreise, die die Kreise des gegebenen Büschels rechtwinklig schneiden. Bei zwei solchen Büscheln ist immer die Radikalaxe des einen die gemeinsame Zentrale des anderen[336]). Den einer Geraden der Ebene nun zugehörigen Polkegelschnitt untersuchte *Poncelet* und zeigte, wann er in ein Geradenpaar ausartet[337]).

52. Ähnliche Kegelschnitte des Büschels und solche von kleinstem oder grösstem Axenprodukt. Nach *Steiner* sind die C_2 eines Büschels im allgemeinen paarweise einander ähnlich; nur zwei einzelne machen eine Ausnahme: die gleichseitige Hyperbel des Büschels und bei konvexem Viereck der Grundpunkte diejenige Ellipse e_0, welche einem Kreis am nächsten kommt[323]); ist das Viereck nicht konvex, so tritt an Stelle von e_0 diejenige Hyperbel, die am meisten von der gleichseitigen abweicht. Die durch die Mittelpunkte der sich

333) Anal. Entw. 1, p. 49. *Plücker* hat sich überhaupt eingehend mit dem Kreisbüschel beschäftigt (a. a. O. 2. Abschn.), ebenso *Hesse,* „Vorl. aus d. anal. Geom. der geraden Linie . . .“, 3. Aufl. Leipzig 1881, 14. Vorlesung.

334) Vgl. *C. W. Merrifield,* London math. soc. Proc. 2 (1869), p. 175—177.

335) *Poncelet,* der zuerst das Poldreieck angab (Traité Nr. 76 und 80) nennt sie points limites; ihre wichtigsten Eigenschaften waren schon *Gaultier* bekannt, a. a. O. [331]), p. 147—153. *Poncelet* bemerkt a. a. O. Nr. 95, dass eine Kreislinie, die unendlich gross wird, in eine im Endlichen gelegene Gerade und g_∞ zerfällt. Die Ausartungen eines durch seine Gleichung in Linienkoordinaten gegebenen Kreises sind: Der doppelt zu zählende Mittelpunkt, das imaginäre Kreispunktepaar, und ferner kann, wie *Gundelfinger* neuerdings Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 255 f. hervorgehoben hat, jedes Punktepaar auf g_∞ als ein Kreis mit 2 Zentren angesehen werden. Das aus den unendlich fernen Punkten der Schenkel eines Winkels bestehende Punktepaar z. B. hat die unendlich fernen Punkte der zwei Winkelhalbierenden zu Zentren.

336) *Poncelet,* Traité Nr. 73—74.

337) Ebenda Nr. 84—88.

ähnlichen Büschelkegelschnitte gelegten Geraden sind einander parallel[338]).

Je sechs Kurven des Büschels haben nach *Steiner* gleiches Axenprodukt, und drei Kurven giebt es, deren Axenprodukte relative Maxima oder Minima sind: bei konvexem Viereck der Grundpunkte eine Ellipse von kleinstem Inhalt und zwei Hyperbeln, deren Axenprodukte Maxima sind, bei nicht konvexem Viereck drei Hyperbeln von maximalem Axenprodukt[339]).

Geht das Viereck in ein Dreieck über, so liegt der Mittelpunkt der kleinsten umschriebenen Ellipse, wie schon *Euler*[340]) auf dem von ihm beim Viereck eingeschlagenen Wege fand, im Schwerpunkt des Dreiecks, und die in den Ecken gezogenen Tangenten sind den Gegenseiten parallel.

53. Doppelverhältnis der Grundpunkte. Für die sechs Doppelverhältnisse der vier Verbindungslinien irgend eines auf $f(x, x) = 0$ gelegenen Punktes mit den vier Grundpunkten des Büschels $\lambda g(x, x) - f(x, x) = 0$ hat *J. J. Walker* eine Gleichung 6. Grades aufgestellt,

338) *Steiner*, J. f. Math. 55 (1858), p. 373 f. = Werke 2, p. 679 f. Nach der Ellipse e_0 wird schon Ann. de math. 17 (1827), p. 284 gefragt, *Steiner* beantwortete die Frage J. f. Math. 2 (1827), p. 64 = Werke 1, p. 123. Zur analyt. Behandlung vgl. *L. Schläfli*, Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 125—128, ferner *S. Kantor*, Wien. Ber. 78 (1878), p. 178, 188, 905—915, wo überhaupt mehrere metrische Formeln für das Kegelschnittbüschel entwickelt werden, so z. B. für die Axenlänge der Mittelpunktskurve, die Parameter der 2 Parabeln des Büschels u. s. w., meist Ausdrücke von grosser Einfachheit.

339) *Steiner* a. a. O.; *Schläfli*, Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 117—120; *F. Seydewitz*, ebenda 13 (1849), p. 66 f. Die Aufsuchung der kleinsten einem Viereck umschriebenen Ellipse hat schon *Euler* beschäftigt, eine geometrische Lösung gab er jedoch zunächst nur für den Fall des Rechtecks (Petrop. Acta pro 1780, pars posterior, p. 3 f.; hier auch Frage nach der Ellipse von kleinstem Umfang), später auch den des Parallelogramms. Beim allgemeinen Viereck beschränkt sich *Euler* auf Bildung der kubischen Gleichung, von der die Lösung abhängt (Nova acta Petrop. 9, gedruckt 1795, geschr. 1777, p. 132—145). *N. Fuss* hat Nova acta Petrop. 11 [1798, geschr. 1795], p. 187—212 diese Gleichung näher untersucht und gefunden, dass sie immer reelle Wurzeln hat. Halbiert die eine Diagonale d_1 des Vierecks die andere d_2, so ist der Mittelpunkt der kleinsten umschriebenen Ellipse die Mitte von d_1 (*C. Th. Anger*, Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 193 f.).

340) Nova acta Petrop. 9, p. 146—153. Vgl. auch *Bérard*, Ann. de math. 4 (1814), p. 288—291; *Liouville*, J. de math. 7 (1842), p. 190 f.; *J. Thomae*, Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 137 ff.; *A. Börsch*, Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 59 ff. *M. Greiner*, Arch. Math. Phys. 28 (1883), p. 281—293 zeigte, dass die kleinste umschriebene Ellipse die konische Polare [III C 2] des Dreieckschwerpunktes in Bezug auf das Dreieck ist; daselbst noch zahlreiche weitere Sätze.

ebenso für die sechs Doppelverhältnisse der vier Punkte, die auf einer Tangente von $g(x, x) = 0$ durch die vier gemeinsamen Tangenten von f und g ausgeschnitten werden. Da beide Gleichungen übereinstimmen, kann man sagen: Wird einem Vierseit ein fester Kegelschnitt g eingeschrieben und ein veränderlicher f, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte für die Kurve f gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die Seiten des Vierseits irgend eine fünfte Tangente von g treffen[341]). *Gundelfinger* beantwortete die Frage, für welchen Kegelschnitt des Büschels $\lambda g - f = 0$ das Doppelverhältnis der vier Grundpunkte gleich einer gegebenen Zahl s wird, mit Hülfe der Invariantentheorie und fand für λ eine Gleichung 6. Grades[342]). Bezüglich spezieller Fälle sei bemerkt, dass es zwei *äquianharmonische* Büschelkurven giebt $\left(s = \sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$, sowie drei *harmonische* ($s = -1$); die Beziehung dieser Kurven zu einem anderen für das Büschel wichtigen, aber ihm nicht angehörigen Kegelschnitt, der Kombinante ψ, wird in Nr. 88 erwähnt.

54. Der Ort für die Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels ist eine bizirkulare C_6 [III C 3], wie wohl *H. Faure* zuerst bemerkte[343]). *K. Bobek*[344]) untersuchte sie näher und fand, dass sie die Ecken des den Büschelkurven gemeinsamen Poldreiecks und dessen Höhenfusspunkte zu Doppelpunkten hat. Die Brennpunktepaare der einzelnen Kegelschnitte bilden auf der C_6 eine lineare Schar von Gruppen zu je zwei Punkten, die durch das Büschel adjungierter C_3 ausgeschnitten wird (III C 2); je zwei solche C_3, die sich in den Doppelpunkten der C_6 rechtwinklig schneiden, treffen die C_6 in zwei

341) Quart. J. 10 (1869), p. 163—167 und p. 317—320. Vgl. auch *Gundelfinger,* Zeitschr. Math. Phys. 20 (1874), p. 158, sowie Vorl., p. 368; *Zeuthen,* Lond. math. soc. Proc. 10 (1879), p. 199.

342) Zeitschr. Math. Phys. 20 (1874), p. 153—155; Vorl., p. 366—371. Für harmonische Kegelschnitte vgl. auch *W. K. Clifford,* London math. soc. Proc. 2 (1866), p. 5 = Math. papers, p. 113.

343) Nouv. ann. 20 (1861), p. 56. Nach *Chasles,* Par. C. R. 58 (1864), p. 299 ist der Ort der Brennpunkte irgend eines Kegelschnittsystems von dreimal so hoher Ordnung als der Ort der Mittelpunkte; vgl. auch *W. S. Burnside,* Educ. Times 10 (1868), p. 63.

344) Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 312—317. Die Gleichung der Brennpunktskurve kann man leicht erhalten mit Hülfe einer Relation, die nach *A. F. Möbius,* J. f. Math. 26 (1843), p. 29 f. = Werke 1, p. 587 zwischen 4 Punkten A, B, C, D eines Kegelschnitts und einem seiner Brennpunkte F stattfindet und folgendermassen lautet: $FA \cdot BCD - FB \cdot CDA + FC \cdot DAB - FD \cdot ABC = 0$, wo z. B. ABC den Inhalt des Dreiecks ABC bezeichnet. Vgl. auch *Salmon-Fiedler,* Kegelschn., p. 520 f. und 535 f.

Brennpunktepaaren *eines* Kegelschnitts. Speziell die Brennpunkte der im Büschel befindlichen Parabeln liegen auf dem *Feuerbach*'schen Kreis des Poldreiecks, wie *L. Painvin*[345]) zuerst bemerkte. Liegen die Grundpunkte des Büschels auf einem Kreis, so zerfällt die C_6 in zwei zirkulare C_3, die die Grundpunkte zu Brennpunkten haben; *Bobek* untersuchte diese Kurven näher[344]). Berühren sich die Kegelschnitte in einem und demselben Punkt, so ist dieser nach *Bobek* ein vierfacher Punkt der C_6, die nun rational ist; bei doppeltberührenden Kegelschnitten ist der Ort der Brennpunkte eine zirkulare C_3, die im Pol der Berührungssehne einen Doppelpunkt mit rechtwinkligen Tangenten hat (focale à noeud, Strophoide, [III C 3])[346]).

55. Einige geometrische Örter. Den Ort für die Berührungspunkte der Tangenten, die man von irgend einem Punkte P an die Kegelschnitte eines Büschels legen kann, untersuchte *Cayley*[347]); er fand eine dem Viereck der Grundpunkte und dem zugehörigen Diagonaldreieck umschriebene C_3, die noch durch P und dessen bez. des Büschels konjugierten Punkt Q geht. Die Enveloppe der Tangenten, die in den Schnittpunkten einer Geraden g mit den Büschelkurven gezogen werden, hat *B. Sporer* eingehend untersucht; er nannte sie Grundkurve des Büschels und der Geraden g. Dieselbe ist eine C^3, die die sechs Verbindungslinien der Grundpunkte einfach und g doppelt berührt[348]).

Besonders interessant sind die Enveloppe der Asymptoten, sowie die der Axen eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln $\mathfrak{B}$, mit den Grundpunkten A, B, C, H.[349]) Die *Enveloppe der Asymptoten* ist nach *Steiner* eine ${C_4}^3$, die g_∞ zur isolierten Doppeltangente hat und mit der Enveloppe der Fusspunktgeraden (*Wallace*'schen Geraden, Nr. **30**) eines der vier durch A, B, C, H als Ecken bestimmten Dreiecke zu-

345) Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 443.

346) *C. Pelz*, Wien. Ber. 73 (1876), p. 383; *V. Berghoff*, Progr. Dortmund 1887; *A. Cazamian*, Nouv. ann. (3) 12 (1893), p. 390. Vgl. auch Fussnote 381.

347) Educ. Times 2 (1864), p. 70—72 = Coll. papers 5, p. 578—580; *M. Greiner*, Arch. Math. Phys. 69 (1883), p. 40—43.

348) Zeitschr. Math. Phys. 38 (1892), p. 34—47; vgl. übrigens auch *H. Müller*, „Über einige Gebilde, die aus der Betrachtung von Kurvensystemen 1. und 2. Ordnung entspringen", Braunschweig 1866, p. 7 f.; *J. Heller*, Arch. Math. Phys. (2) 7 (1887), p. 325—329.

349) Für beliebige Kegelschnittbüschel vgl. *M. Trebitscher*, Wien. Ber. 81 (1880), p. 1080—1091; ferner *E. Laguerre*, Nouv. ann. (2) 18 (1879), p. 206—211; *K. Bobek*, Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 309—312. Über die Enveloppe der Asymptoten eines Büschels von C_n vgl. *Steiner*, J. f. Math. 47 (1854), p. 70 = Werke 2, p. 563.

sammenfällt[350]). Wie *L. Schläfli* bemerkte[351]), ist die Kurve eine Hypocykloide h_1 mit drei Spitzen (III C 3), wie sie von einem Punkt der Peripherie eines Kreises beschrieben wird, der in einem Kreise von dreimal grösserem Radius rollt ohne zu gleiten [IV 3, Nr. **11**; Nr. **23**, bes. Anm. 313]. *Steiner* erkannte überdies, dass der den vier genannten Dreiecken gemeinschaftliche *Feuerbach*'sche Kreis f die Kurve h_1 in drei Punkten (Scheiteln) berührt, die die Kreisperipherie in drei gleiche Teile teilen; ferner giebt er an, wie die drei Spitzen, deren Tangenten sich im Mittelpunkt des *Feuerbach*'schen Kreises schneiden und durch je einen Scheitel der Kurve gehen, auf einem Kreis liegen, der mit f konzentrisch ist, aber dreimal grösseren Radius hat. Die Umkreise der vier durch A, B, C, H bestimmten Dreiecke haben gleiche Radien, so gross wie der Durchmesser von f, und ihre Mittelpunkte bilden wieder Grundpunkte α, β, γ, χ für ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln $\mathfrak{B}_2$, deren Asymptoten eine Hypocykloide h_2 umhüllen, die mit h_1 kongruent ist. Auch die Tangenten der Spitzen von h_2 treffen sich im Zentrum von f, aber h_2 ist im Vergleich zu h_1 um dieses Zentrum um 180^0 gedreht[350]).

Nach *E. Laguerre*[349]) ist nun auch bei beliebigen Büscheln $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$, die in gleicher Weise wie $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zusammengehören, wobei jedoch H und χ nicht Höhenschnittpunkte sein müssen, die Enveloppe der Asymptoten von $\mathfrak{B}_1'$ zugleich Enveloppe der Axen von $\mathfrak{B}_2'$, und umgekehrt, woraus hervorgeht, dass die Kurve h_2 die *Enveloppe der Axen* des Büschels $\mathfrak{B}_1$ darstellt. Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbeln, die das Dreieck ABC zum Poldreieck haben, also dem Viereck umschrieben sind, das durch die Mittelpunkte der dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreise gebildet wird (Nr. **50**), umhüllen eine Hypocykloide h_3, deren Scheitel auf dem Umkreis u von ABC liegen; der durch die Spitzen von h_3 gelegte Kreis hat doppelt so grossen Radius als der analoge Kreis bei h_1 und h_2.[352])

---

350) J. f. Math. 53 (1856), p. 231—237 = Werke 2, p. 639—647. Die Berührungspunkte mit g_∞ sind nach *H. Schröter* die imaginären Kreispunkte, J. f. Math. 54 (1857), p. 34; daselbst überhaupt mehrere Verallgemeinerungen der *Steiner*'schen Sätze.

351) Vgl. *J. H. Graf*, „Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli", Bern 1896, p. 207 f. Einen wirklichen *Beweis*, dass h_1 eine Hypocykloide ist, veröffentlichte zuerst *L. Cremona*, J. f. Math. 64 (1864), p. 104 f., zeigte auch umgekehrt, dass jede C_4^3, die von g_∞ in den imaginären Kreispunkten berührt wird, eine Hypocykloide mit 3 Spitzen ist.

352) Vgl. Nr. **50**; ferner *P. Serret*, Nouv. ann. (2) 9 (1870), p. 79 f.; *C. Intrigila*, Giorn. di mat. 23 (1884), p. 267. Wir werden später (Nr. **63**) nochmals der dreispitzigen Hypocykloide begegnen, erwähnen jetzt noch weitere Autoren,

Die Enveloppe der Axen ist eine mit h_3 kongruente Kurve h_4, die im Vergleich zu h_3 um den Mittelpunkt des Kreises u um 180^0 gedreht ist.

B. Kegelschnittscharen.

56. Gemeinsames Poldreiseit. Dem Kegelschnittbüschel entspricht dual die *Kegelschnittschar*[353]), die Gesamtheit der C^2, die vier gegebene Geraden, die Grundtangenten berühren, analytisch dargestellt durch:

$$(42)\quad \begin{cases} \varphi(u,u) - \lambda\psi(u,u) = 0, \quad \text{wobei} \quad \varphi(u,u) \equiv \overline{\sum_1^3 \sum_k} \alpha_{ik} u_i u_k, \\ \psi(u,u) \equiv \overline{\sum_1^3 \sum_k} \beta_{ik} u_i u_k \qquad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \ \beta_{ik} = \beta_{ki}). \end{cases}$$

Wir geben zunächst die wichtigsten Sätze an, die den beim Büschel mitgeteilten dual entsprechen. In der Schar befinden sich drei Punktepaare (Schnittpunkte der Grundtangenten), und ihre Träger bilden ein Poldreiseit Δ für jede Kurve der Schar. Die Punktepaare sind reell, wenn die vier Grundtangenten reell sind; im Falle von vier imaginären Grundtangenten ist ein Punktepaar reell, die beiden anderen sind imaginär, aber Δ hat reelle Seiten. Sind zwei Grundtangenten imaginär, so ist nur ein Punktepaar reell, ebenso nur eine Seite von Δ und deren Gegenecke[354]).

---

die sich mit ihr beschäftigten: *H. R. Greer,* Quart. J. 7 (1865), p. 70—74; *N. M. Ferrers,* Quart. J. 8 (1866), p. 209—211; ebenda 9 (1868), p. 147—154; *F. H. Siebeck,* J. f. Math. 66 (1866), p. 344—362; *W. Walton,* Quart. J. 9 (1867), p. 142—146; *Cayley,* Quart. J. 9 (1868), p. 31—41 und 175 f. = Coll. papers 6, p. 72—82; *J. Griffiths,* Quart. J. 9 (1868), p. 346 f.; *L. Painvin,* Nouv. ann. (2) 9 (1870), p. 202—211, 256—270; *L. Kiepert,* Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 129 ff.; *H. Brocard,* Par. soc. math. Bull. 1 (1873), p. 224 ff.; *A. Milinowski,* Zeitschr. Math. Phys. 19 (1874), p. 115—137; *S. Kantor,* Wien. Ber. 78 (1878), p. 204—233; *W. Fiedler,* Zürich. Viert. 30 (1885), p. 390—402; *K. Dörholt,* Progr. Gymn. Rheine 1891, p. 19; *B. Sporer,* Zeitschr. Math. Phys. 38 (1892), p. 38—43; *O. Rupp,* Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 135—146; *Gundelfinger,* Vorl., p. 410—415; *C. Wirtz,* Diss. inaug. Strassburg 1900.

353) Bei *Steiner* bedeutet Kurvenschar häufig überhaupt ein Kurvensystem; die strenge Scheidung bei *Steiner-Schröter,* 1. Aufl. Leipzig 1867, p. 279. Engl. range, auch tangential pencil, französ. faisceau tangentiel, ital. schiera.

354) *Plücker,* Anal. Entw. 2, p. 167—171; *Chasles,* Sect. con., p. 231—233; *Steiner-Schröter,* § 54. *Chasles* nennt die obigen Punkte points ombilicaux, a. a. O. p. 228. Bezügl. analytischer Kriterien für die Realität der gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte vgl. *K. Kemmer,* Diss. inaug. Giessen 1878, sowie *Gundelfinger,* Vorl., p. 377. Die Schar mit 2 reellen und 2 imaginären Grundtangenten ist bei *Steiner-Schröter,* § 50 behandelt. Zur Konstruktion von Kegelschnittscharen sei auf *Chr. Wiener* [306]) verwiesen.

Auch die Kegelschnitte, die ein gegebenes Dreiseit zum Poldreiseit haben und eine gegebene Gerade berühren, bilden eine Schar, ebenso allgemeiner diejenigen, welche k gegebene Geraden berühren ($k = 0, 1, 2, 3$) und $4 - k$ gegebene Geradenpaare zu Paaren konjugierter Polaren haben[355]).

57. Mittelpunktsgerade. Polarkegelschnitt. Eine beliebige Gerade der Ebene wird von nur einer Kurve der Schar berührt[32]); dagegen gehen durch einen beliebigen Punkt P zwei Scharkurven[356]). Die von P an alle Kegelschnitte der Schar gelegten Tangenten bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen aus den in P gezogenen Tangenten der eben genannten zwei Kurven bestehen. Der Ort aller Punkte, von denen sich an φ und ψ harmonische Tangentenpaare legen lassen, ist eine C_2 (vgl. Nr. 48), deren Gleichung die Koeffizienten von φ und ψ je im ersten Grad enthält; sie wird zum Direktorkreis von φ, wenn $\psi = 0$ das imaginäre Kreispunktepaar darstellt. Die in Bezug auf die Scharkurven genommenen Pole einer Geraden u erfüllen eine Gerade v, und umgekehrt liegen die Pole von v auf u;[357]) beide Geraden heissen konjugiert hinsichtlich der Schar. Hieraus folgt sofort, dass die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schar als Pole von g_∞ eine Gerade, die „Mittelpunktsgerade", erfüllen, die durch die Mitten der Diagonalen des gemeinsamen Tangentenvierseits geht[358]). Bereits *Newton* und *Euler*[359]) hatten übrigens bemerkt, dass die Mittelpunkte der einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte eine Gerade erfüllen, und *K. F. Gauss*[360]) bewies, dass auf ihr auch die Mitten der Diagonalen des Vierseits liegen.

Die in Bezug auf alle Kurven einer Schar genommenen Polaren eines gegebenen Punktes x umhüllen einen Kegelschnitt:

---

355) *P. Serret* zeigte, wie man die Grundtangenten dieser Scharen findet („Géom. de direction", Paris 1869, p. 464—468).

356) *Gergonne,* Ann. de math. 11 (1821), p. 389.

357) *Poncelet*, Traité Nr. 398.

358) So hat *Poncelet* den Satz ausgesprochen Ann. de math. 11 (1821), p. 211 = Appl. d'anal. 2, p. 509, einen synthetischen Beweis giebt er Ann. de math. 12 (1821), p. 109—111, einen analytischen *Gergonne,* Ann. de math. 11 (1821), p. 382 f.

359) *Newton,* „Philos. nat. principia mathematica" Buch 1, Lemma 25, Corol. 3 = Opera hrsgg. von *S. Horsley,* 2, p. 114 = deutsche Übers. von *Wolfers,* Berlin 1872, p. 108, Zusatz 3; *Euler,* „Introductio in analysin infinitorum", Bd. 2, Lausannae 1748, p. 61.

360) Brief an *G. W. Bessel,* Januar 1810 in „Briefwechsel zw. Gauss u. Bessel", Leipzig 1880, p. 108; Monatl. Corresp. 22 (1810), p. 114 f. und 120 f. = Werke 4, p. 387 f. und 391 f. Eine Verallgemeinerung des Satzes bei *O. Schlömilch,* Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878), p. 191—193.

$$(43) \qquad \mathsf{N} \equiv \sum \pm \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} x_3 \right) = 0,$$

den Polarkegelschnitt des Punktes x; derselbe wird auch von denjenigen Geraden umhüllt, welche zu den durch x gehenden Geraden konjugiert sind. Die Kurve entspricht dual der bei Büscheln auftretenden Kurve N; auch für N lassen sich daher sofort mehrere Tangenten angeben, z. B. die Diagonalen des Vierseits der Grundtangenten[361]).

58. Die Art der in einer Schar enthaltenen Kurven untersuchte *Steiner,* und er kam hierbei zu folgendem Ergebnis: Die Seiten des dem Tangentenvierseit zugehörigen Poldreiseits zerlegen die Ebene, von diesem Dreiseit abgesehen, in drei trigonale und drei tetragonale Felder. Je nachdem nun der Mittelpunkt einer Scharkurve in einem tetragonalen oder in einem trigonalen Felde liegt, ist diese Kurve eine Hyperbel oder Ellipse; in das Innere des Dreiseits dringt die Mittelpunktsgerade m nicht ein. Man sieht leicht, dass somit im allgemeinen zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln vorhanden sind; dem unendlich fernen Punkte von m entspricht die einzige im allgemeinen in der Schar befindliche Parabel[362]). Auch zwei gleichseitige Hyperbeln gehören der Schar an, und zwar sind ihre Mittelpunkte die Schnittpunkte von m mit dem Umkreis des Poldreiseits[363]). Die Art derjenigen Kurve der Schar, welche eine beliebig gegebene Gerade berührt, also durch fünf Tangenten bestimmt ist, untersuchte *Möbius*[364]). Enthält die Schar zwei Parabeln, so besteht sie überhaupt nur aus Parabeln.

59. Ähnliche Kegelschnitte der Schar und solche von grösstem Axenprodukt. Nach *Plücker* sind die Kegelschnitte einer Schar im

361) *Poncelet,* Ann. de math. 12 (1822), p. 247 = Appl. d'anal. 2, p. 526; Traité Nr. 399. *R. Slawyk,* Zeitschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 36—51 untersuchte, auf welche Weise N zugleich Polkegelschnitt N einer gewissen Geraden in Bezug auf ein gewisses Kegelschnittbüschel ist, insbesondere auch dann, wenn N der *Feuerbach*'sche Kreis eines gewissen Dreiecks ist. Die Bezeichnung Polarkegelschnitt bei *Steiner-Schröter,* p. 307. Das Prinzip, in der Apolaritätstheorie (Nr. 82) einen Kegelschnitt einmal als Ordnungs-, das andere Mal als Klassengebilde aufzufassen, wird von *W. Fr. Meyer*[151]) öfters verwendet.

362) J. f. Math. 55 (1858), p. 374 = Werke 2, p. 680; *Steiner-Schröter,* § 46, für Scharen mit 2 imaginären Tangenten § 50. Ein analytischer Beweis obiger Kriterien bei *Gundelfinger,* Vorl., p. 359—361.

363) *Brianchon* und *Poncelet,* Ann. de math. 11 (1821), p. 210 f. = *Poncelet,* Appl. d'anal. 2, p. 508 f. Diese Hyperbeln können auch in eine einzige zusammenfallen, sowie imaginär werden. Die einen Kreis enthaltenden Scharen hat *Chasles,* J. de math. 3 (1838), p. 419—422 kurz behandelt.

364) Baryc. Calcul § 264 = Werke 1, p. 341—343.

allgemeinen zu je vier einander ähnlich, und jede vier ähnliche gehören paarweise den vorerwähnten Gruppen an; aber *eine* Kurve giebt es in jeder Gruppe, die keiner anderen ihrer Gruppe ähnlich ist, und zwar ist für sie das Axenverhältnis ein Maximum[365]). *Steiner* bemerkte, dass es im allgemeinen unter den Scharkurven keine zwei giebt, die ähnlich und ähnlich liegend sind; giebt es aber in besonderem Falle ein solches Paar, so sind alle Kurven paarweise ähnlich und ähnlich liegend. Die Kegelschnitte der Schar haben im allgemeinen paarweise parallele Axen, wie überhaupt jedes Paar konjugierter Durchmesser eines der Kegelschnitte im allgemeinen mit einem Paar konjugierter Durchmesser irgend eines der übrigen parallel ist. Nur ein ausgezeichnetes Paar solcher Durchmesser giebt es bei jeder Kurve, das mit keinem Paar konjugierter Durchmesser irgend eines der übrigen parallel ist, und bei *zwei* Kurven der Schar besteht dieses Paar aus den Axen[365]). Je drei Kegelschnitte haben gleiches Axenprodukt, und ausserdem giebt es eine Ellipse und eine Hyperbel, denen ein Maximum dieses Produktes zukommt[366]). Die grösste einem Vierseit eingeschriebene Ellipse bestimmte übrigens zuerst *Gauss*, durch *Bessel* angeregt, rein analytisch; kurz darauf beschäftigten sich auch *J. F. Pfaff*, *C. Mollweide* und *H. C. Schumacher* mit der Aufgabe[367]). Die Lösung hängt von einer quadratischen Gleichung ab, deren eine Wurzel der Ellipse entspricht, die andere der schon erwähnten Hyperbel. *Plücker* fand eine charakteristische Eigenschaft der Mittelpunkte E, H dieser Kurven, die nur in etwas anderer äusserer Form auch *Steiner* bemerkte[368]). *F. Seydewitz* gab einen leicht konstruierbaren Kreis an, der aus m die Punkte E und H ausschneidet[369]).

---

365) Anal. Entw. 2, p. 220—226; vgl. auch *Schläfli*, Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 123—125; *Steiner*, J. f. Math. 55 (1858), p. 374—376 = Werke 2, p. 680—682; *Steiner-Schröter*, p. 277—281.

366) *Steiner*, a. a. O. sowie Roma Giorn. arcad. 99 = J. f. Math. 30 (1846), p. 102 = Werke 2, p. 333 f. Analytisch bewiesen und noch durch andere vermehrt wurden diese Sätze von *J. Mautner*, Wien. Ber. 80 (1879), p. 973—1022, einige bewies auch *Gundelfinger*, Vorl., p. 361 f.

367) Brief von *Bessel* an *Gauss* 1809, sowie von *Gauss* an *Bessel* 1810, beide im „Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel", Leipzig 1880, p. 104 f. und p. 107—110; *Gauss*, Monatl. Corresp. 22 (1810), p. 112—121 = Werke 4, p. 385—392; *Pfaff*, ebenda, 223—226; *Mollweide*, ebenda, p. 227—234; *Schumacher*, ebenda, p. 507—512, sowie Brief an *Gauss* 1810, „Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher", hrsgg. von *Peters*, Bd. 1, Altona 1860, p. 30—32. *Pfaff* bemerkte auch, dass die grösste eingeschriebene zugleich die kleinste dem Viereck der Berührungspunkte umschriebene Ellipse ist.

368) *Plücker*, Anal. Entw. 2, p. 211 f.; *Steiner* [366]). Die Mitte M der Strecke EH ist nämlich der Schwerpunkt der 3 Diagonalenmitten P, Q, R des Vierseits,

Tritt an Stelle des Vierseits ein Dreiseit, so werden die Berührungspunkte der grössten eingeschriebenen Ellipse die Seitenmitten, und der Kurvenmittelpunkt liegt im Schwerpunkt des Dreiseits[370]); die Kurve ist konzentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen zu der kleinsten umschriebenen Ellipse (Nr. 52), und beider Inhalte stehen im Verhältnis $1 : 4$.[371]) Auch unter den Ellipsen, die ein gegebenes Dreiseit zum Poldreiseit haben, ist diejenige die grösste, deren Zentrum im Schwerpunkt des Dreiseits liegt; ihr Inhalt ist doppelt so gross als der Inhalt der grössten eingeschriebenen Ellipse[372]).

60. Direktorkreise der Scharkurven. Die Direktorkreise zweier Kegelschnitte der Schar schneiden sich in zwei Punkten P_1, P_2, und die von jedem derselben an die zwei Kegelschnitte gelegten Tangentenpaare sind Paare rechtwinkliger Geraden; da aber alle von P_1 oder P_2 an die Scharkurven gezogenen Tangentenpaare eine Involution bilden, müssen jetzt *alle* durch jene zwei Punkte an Kurven der Schar gelegten Tangentenpaare aus sich rechtwinklig schneidenden Geraden bestehen. Es giebt somit zwei Punkte, von denen man an alle Kegelschnitte einer Schar zu einander rechtwinklige Tangenten ziehen kann. Auch erkennt man, dass die Direktorkreise einer Schar ein Büschel bilden[373]); seine Grundpunkte ergeben sich sofort als Schnittpunkte der den Punktepaaren der Schar zugehörigen Direktorkreise. Die über den Diagonalen eines vollständigen Vierseits als Durchmessern

---

und es ist $EM = MH = \sqrt{\frac{MP^2 + MQ^2 + MR^2}{6}}$. Einen analytischen Beweis gaben auch *Schläfli,* Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 116, *G. B. Mathews,* London math. soc. Proc. 22 (1890), p. 23—26, *O. Böklen,* Math.-naturw. Mitt. des math.-naturw. Vereins in Württemberg (2) 1 (1899), p. 45. *Plücker* bestimmte a. a. O., p. 206—211 auch die eingeschriebene Ellipse oder Hyperbel von gegebenem Axenprodukt.

369) Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 44—53.

370) *L. Puissant,* „Recueil de diverses propositions de géométrie", 2. Aufl. Paris 1809, p. 195—197.

371) *Pfaff,* a. a. O. [367]). Vgl. auch *Bérard,* Ann. de math. 4 (1814), p. 284—288; *Gambey* und *Moret-Blanc,* Nouv. ann. (2) 12 (1873), p. 139—143, sowie *J. Thomae,* Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 137 ff. Die 2 Ellipsen werden häufig als *Steiner*'sche Ellipsen bezeichnet.

372) *G. Fazzari,* Giorn. di mat. 25 (1887), p. 305 f. — Nach einem Satze von *H. Faure* bilden die Polaren der Seitenmitten eines Dreiecks mit Bezug auf irgend einen dem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitt ein Dreiseit von konstantem Inhalt (Nouv. ann. 20 (1861), p. 141). Zum Beweis vgl. *W. F. Walker,* Quart. J. 7 (1864), p. 119—122; *J. Neuberg,* Nouv. ann. (2) 5 (1866), p. 511—520; *A. S.,* ebenda, p. 37—40. Die Inhalte beider Dreiseite erweisen sich übrigens als gleich.

373) *Plücker,* Anal. Entw. 2, p. 198.

beschriebenen Kreise schneiden sich also in einem und demselben Punktepaar[374]); der Träger dieses Paares ist natürlich die Direktrix der in der Kurvenschar befindlichen Parabel. Dem Büschel von Kreisen, die das eben genannte Büschel rechtwinklig schneiden, gehören nach *P. Serret*[375]) auch die Kreise an, welche die durch die vier Grundtangenten der Schar bestimmten Dreiseite zu Poldreiseiten haben, ebenso der Umkreis des der Schar gemeinsamen Poldreiseits; die Radikalaxe dieses Büschels ist die Mittelpunktsgerade der Schar.

61. Der Ort für die Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar ist, wie *H. Faure* ohne Beweis erwähnt[376]), eine zirkulare C_3, die durch die sechs Ecken des vollständigen Vierseits der Grundtangenten und durch die Höhenfusspunkte des gemeinsamen Poldreiseits der Schar geht. *L. Cremona*[377]) hat diese Behauptung synthetisch bewiesen. *H. Schröter*[378]) formuliert die Frage nach der Brennpunktskurve als Frage nach dem Ort eines Punktes P, für den die an die Kurven der Schar gelegten Tangentenpaare ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlensystem bilden. Er beweist die Angaben von *Faure* und gewinnt weitere Resultate. Ferner beweist er die von *K. Küpper* herrührende Konstruktion der Brennpunktskurve: Durch den Brennpunkt B der in der Schar befindlichen Parabel zieht man die Durchmesser der Kreise eines gewissen Kreisbüschels; ihre Endpunkte er-

374) Wie *C. Gudermann* („Grundriss der analytischen Sphärik", Köln 1830, p. 138) bemerkt, wurde ihm dieser Satz mündlich durch *Bodenmiller* mitgeteilt; *Gudermann* stellt übrigens J. f. Math. 6 (1830), p. 213 einen allgemeineren Satz zum Beweis, bei dem statt der Kreise ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen beschrieben werden. *O. Schlömilch,* Leipz. Ber. 6 (1854), p. 9 f. und *Möbius,* ebenda, p. 87—91 = Werke 2, p. 237—242 haben Beweise des Satzes von *Bodenmiller* gegeben, ebenso *Chasles,* Géom. sup., p. 234. *P. Serret,* „Géom. de direct.", p. 114 ff. nennt das Punktepaar les points cycliques du quadrilatère. Für die drei Kreise, die über den Verbindungslinien von innerem und äusserem Ähnlichkeitspunkt je zweier von drei Kreisen als Durchmessern beschrieben werden, findet sich der Satz ohne Autorangabe Ann. de math. 11 (1820), p. 132 und wird ebenda, (1821), p. 364 f. von *Vecten* und *J. B. Durrande* bewiesen; vgl. auch *Schlömilch,* a. a. O., wo noch weitere Folgerungen. Dass diese sechs Ähnlichkeitspunkte die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, indem die drei äusseren Ähnlichkeitspunkte auf einer Geraden liegen ebenso wie je zwei innere zusammen mit einem äusseren Ähnlichkeitspunkt, bewies *G. Monge,* „Géométrie descriptive" 1. Aufl. Paris 1799, p. 54 f.; deutsche Übers. von *R. Haussner* in Ostw. Klass. Nr. 117, p. 68 f.

375) „Géom. de direct.", p. 114—116; *S. Kantor,* Wien. Ber. 76 (1877), p. 789 f.

376) Nouv. ann. 20 (1861), p. 56.

377) Nouv. ann. (2) 3 (1864), p. 23—25.

378) Math. Ann. 5 (1871), p. 50—63.

füllen alsdann die Brennpunktskurve. Auch *H. Durège*[379]) hat diese Kurve eingehend behandelt. Ferner bewies er den schon von *Chasles* und *F. H. Siebeck*[380]) ausgesprochenen Satz, dass, wenn in der Schar ein Kreis enthalten ist, die C_3 im Mittelpunkt C des Kreises einen Doppelpunkt hat (focale à noeud, Strophoide (III C 3))[381]); gehören zwei Kreise k_1, k_2 der Schar an, so zerfällt die C_3 in die Mittelpunktsgerade und einen durch die Zentren von k_1 und k_2 gehenden Kreis, der B zum Mittelpunkt hat.

62. Einige geometrische Örter. Den Ort für die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkte P an die Kegelschnitte einer Schar legen kann, haben *H. Müller* und *M. Greiner*[382]) analytisch untersucht; der Ort ist eine durch die sechs Ecken des Vierseits v der Grundtangenten gehende C_3 mit Doppelpunkt in P. *J. Heller*[383]) betrachtete die dual entsprechende Kurve, die Enveloppe

379) Math. Ann. 5 (1871), p. 83—94; *A. Cazamian,* Nouv. ann. (3) 12 (1893), p. 399 f.

380) *Chasles,* J. de math. 3 (1838), p. 422; *Siebeck*, J. f. Math. 64 (1864), p. 179. Nach *Chasles* ist obige C_3 auch Ort für die Fusspunkte der von C auf die Scharkurven gefällten Normalen.

381) Diese Kurve ist von *A. Quetelet,* „Dissertatio de quibusdam locis geometricis nec non de curva focali", Gand 1819, *Em. Weyr,* Giorn. di mat. 9 (1871), p. 259—261 u. A. näher betrachtet worden. *H. Schröter* hat Math. Ann. 6 (1872), p. 85—88 für sie eine sehr einfache Konstruktion angegeben und bei dieser Gelegenheit für die allgemeine Brennpunktskurve den Satz gefunden: Wird irgend ein Punkt A derselben mit zwei anderen Kurvenpunkten B, C verbunden, sowie mit den Punkten B', C', die B bezw. C zu Brennpunktepaaren je desselben Kegelschnittes ergänzen, so ist stets $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC'$ oder $= 2R - B'AC'$. Die Brennpunktskurve der Kegelschnitte, die einem durch die Geraden BC, BC', $B'C$, $B'C'$ gebildeten Vierseit eingeschrieben sind, ist somit ein Teil des Ortes aller Punkte, von denen zwei Strecken BC und $B'C'$ unter gleichen oder supplementären Winkeln erscheinen. Dieser Ort enthält ausserdem noch eine andere C_3, die Brennpunktskurve für ein durch die Geraden BC, BB', CC', $B'C'$ gebildetes Vierseit. Dass dieser Ort aus zwei C_3 besteht, hat wohl *Steiner*, J. f. Math. 45 (1852), p. 375 = Werke 2, p. 487 zuerst bemerkt. Auch *W. Stammer,* Arch. Math. Phys. 68 (1882), p. 18—36; *O. Hermes,* J. f. Math. 97 (1884), p. 177—187; *P. H. Schoute*, J. f. Math. 99 (1885), p. 98—109 haben sich mit dem Orte näher beschäftigt; vgl. ferner *Chasles,* Paris, C. R. 37 (1853), p. 438; *C. Pelz,* Wien. Ber. 64 (1871), p. 730—740; *Siebeck,* J. f. Math. 64 (1864), p. 177—179; *S. Kantor,* Wien. Ber. 78 (1878), p. 815 f.; *Gundelfinger,* Vorl., p. 339 und 407. Zur Brennpunktskurve vgl. noch *Steiner,* J. f. Math. 45 (1852), p. 179 f. = Werke 2, p. 433 f.; *Th. Walter,* Progr. Büdingen 1878; *G. Humbert,* Nouv. ann. (3) 12 (1893), p. 123—128; *Gundelfinger,* Vorl., p. 404—409.

382) *Müller,* „Über einige Gebilde, die aus der Betrachtung von Kurvensystemen 1. und 2. Ordnung entspringen", Braunschweig 1866, p. 15 f.; *Greiner,* Arch. Math. Phys. 69 (1883), p. 30—39.

383) Arch. Math. Phys. (2) 7 (1887), p. 326—328.

der in den Schnittpunkten einer gegebenen Geraden mit den Scharkurven gezogenen Tangenten; sie ist eine C^3, die die Seiten von v einfach und die gegebene Gerade doppelt berührt. Hiernach umhüllen auch die Asymptoten der Scharkurven eine C^3; ebenso ist die Enveloppe der Axen eine C^3.[384])

63. Schar der einem Dreiseit eingeschriebenen Parabeln. Unter den besonderen Kegelschnittscharen sei zunächst hervorgehoben die Schar s der einem Dreiseit Δ eingeschriebenen Parabeln. Hier fällt eine Seite des Vierseits der Grundtangenten mit g_∞ zusammen und das zugehörige Poldreiseit Δ' ist identisch mit dem zu Δ parallel umschriebenen Dreiseit, denn Δ' wird durch die Träger der in der Schar enthaltenen Punktepaare gebildet, die nun je aus einer Ecke von Δ und dem unendlich fernen Punkt der Gegenseite bestehen. Umgekehrt berühren alle Parabeln, die ein gegebenes Dreiseit zum Poldreiseit haben, die Verbindungslinien der Seitenmitten desselben, bilden also eine Schar s'.[385]) Der Ort der Brennpunkte der Parabelschar s besteht nun aus g_∞ und dem Umkreis von Δ (Nr. **30**); die zugehörigen Direktricen bilden hingegen, wie *Steiner* zuerst zeigte, ein Strahlenbüschel, dessen Zentrum im Höhenschnittpunkt H von Δ liegt[386]). Man erkennt ferner, dass sich die Direktricen der Parabelschar s', die Δ zum Poldreiseit hat, im Mittelpunkt des Umkreises von Δ schneiden[387]), während ihre Brennpunkte die Gerade g_∞ und den *Feuerbach*'schen Kreis von Δ erfüllen[388]). Ausserdem folgt, dass die Höhenschnittpunkte der vier Dreiseite, die durch vier beliebige Geraden bestimmt sind, auf der Direktrix der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel liegen[389]), während die Umkreise dieser Dreiseite

384) *Siebeck,* J. f. Math. 64 (1864), p. 179 f.; *Schröter,* Math. Ann. 5 (1871), p. 63.

385) *J. Mention,* Nouv. ann. (2) 3 (1864), p. 536.

386) J. f. Math. 2 (1827), p. 191 = Werke 1, p. 134; Ann. de math. 19 (1828), p. 59 = Werke 1, p. 207. Bei *Steiner* ist der Satz spezieller Fall eines allgemeineren Satzes; seine Richtigkeit folgt einfach auch daraus, dass jedes der drei von H an die Punktepaare der Schar gelegten Tangentenpaare einen rechten Winkel einschliesst. Die von H an die Kurven der Schar gelegten Tangentenpaare bilden daher eine rechtwinklige Involution; andererseits treffen sich aber alle zu einander senkrechte Parabeltangenten in Punkten der Direktrix, die Direktricen gehen also sämtlich durch H. Umgekehrt liegen die Höhenschnittpunkte aller einer Parabel umschriebenen Dreiseite auf der Direktrix der Kurve.

387) *Steiner-Schröter,* p. 523 f.

388) *L. Painvin,* Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 443. Vgl. auch Nr. **54**.

389) *Steiner,* J. f. Math. 2 (1827), p. 97 = Werke 1, p. 128; Ann. de math. 19 (1828), p. 59 = Werke 1, p. 207. Ein von *De Morgan* und *W. S. Burnside* mitgeteilter Beweis bei *Salmon-Fiedler,* p. 456 f.; vgl. auch *F. Heinen,* J. f. Math. 3 (1828), p. 290.

durch den Brennpunkt der Parabel gehen[390]). Nach einem Satze von *A. Miquel* liegen die Brennpunkte der fünf Parabeln, deren jede je vier Seiten eines und desselben Fünfseits berührt, auf einem Kreis[391]), und die Kreise, die auf solche Weise den durch sechs Geraden bestimmten sechs Fünfseiten zugehören, gehen nach *W. K. Clifford* durch einen und denselben Punkt. Die sieben Punkte, die auf diese Art den durch sieben Geraden bestimmten sieben Sechsseiten zugehören, liegen wieder auf einem Kreis, und so abwechselnd weiter[392]).

Da die Fusspunkte der vom Brennpunkt F einer Parabel p auf die Tangenten der Kurve gefällten Lote die Scheiteltangente erfüllen (Nr. **30**), ist die Enveloppe der Scheiteltangenten der Parabelschar s identisch mit der Enveloppe der Fusspunktgeraden w des Dreiecks Δ, also mit der Hypocykloide h_1, die nach Nr. **55** Enveloppe der Asymptoten der dem Dreieck Δ umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ist[393]). Man kann nun ferner zeigen, dass die Axe der Parabel p eine Fusspunktgerade für das Poldreiseit Δ' ist; als Enveloppe der Parabelaxen erhält man somit gleichfalls eine Hypocykloide h'. Diese ist doppelt so gross als h_1 und hat zu h_1 entgegengesetzte Lage in Bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt S von Δ und Δ', denn auch Δ' und Δ haben solche Lage und solches Grössenverhältnis der Seiten[394]). Die

390) *Poncelet,* Traité Nr. 466. Die Mittelpunkte obiger Kreise liegen nach *Steiner,* Ann. de math. 18 (1828), p. 302 = Werke 1, p. 223 wieder auf einem Kreis; näheres über diese Kreise bei *S. Kantor,* Wien. Ber. 78 (1878), p. 166—171, ferner 192 und 797—825.

391) J. de math. 10 (1845), p. 349; ein analyt. Beweis bei *Ferrers,* Messeng. (2) 24 (1894), p. 60—66. Andere Sätze dieser Art giebt *Miquel,* J. de math. 3 (1838), p. 485—487; vgl. ferner *S. Kantor,* a. a. O. [390]) p. 165—171.

392) Messeng. 5 (1870), p. 124—141 = Math. papers, p. 38—54; *S. Kantor,* Wien. Ber. 76 (1877), p. 754—757; 78 (1878), p. 789—796; *F. Morley,* Trans. amer. math. soc. 1 (1900), p. 97—115. Auch *T. Fuortes,* Giorn. di mat. 16 (1878), p. 91—107 giebt einen Beweis der *Clifford*'schen Sätze und zeigt ausserdem, dass zu jedem System von $2n+1$ Geraden ein Kreis gehört als Ort aller Punkte P von solcher Beschaffenheit, dass die Fusspunkte der von P auf die Geraden gefällten Lote eine C_n erfüllen, die in P einen $(n-1)$fachen Punkt hat; zu $2n+2$ Geraden gehört dagegen nur ein einziger Punkt P gleicher Beschaffenheit.

393) *Cremona,* J. f. Math. 64 (1864), p. 110. Überhaupt lässt sich ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln vermöge Transformation durch reziproke Polaren in eine Parabelschar überführen. Beschreibt man nämlich um irgend einen Grundpunkt A des Hyperbelbüschels einen Kreis, so ist die in Bezug auf ihn genommene reziproke Polare einer Kurve des Büschels eine Parabel, die dem durch die Polare der drei übrigen Grundpunkte gebildeten Dreiseit eingeschrieben ist; dabei ist A auch für dieses Dreiseit Höhenschnittpunkt (*Steiner-Schröter,* p. 264 f.).

394) Die Rückkehrtangenten von h' treffen sich im Mittelpunkt des zu Δ' gehörigen *Feuerbach*'schen Kreises (Nr. **55**), zugleich Umkreises von Δ (*Steiner,*

Kurve h' fällt übrigens zusammen mit der oben (Nr. **55**) durch h_3 bezeichneten Enveloppe für die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbeln, die Δ zum Poldreieck haben[395]). Die Parabeln, die Δ zum Poldreiseit haben und die Schar s' bilden, berühren die Seiten des zu Δ parallel eingeschriebenen Dreiseits Δ''; ihre Axen sind Fusspunktgeraden von Δ, umhüllen daher die Kurve h_1, ihre Scheiteltangenten umhüllen eine Hypocykloide h_5, die halb so gross ist als h_1 und zu h_1 entgegengesetzte Lage hat in Bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt S.[396]) Die Kurve h_5 ist übrigens auch Enveloppe der Axen aller dem Dreieck Δ umschriebenen Parabeln[397]).

Plücker zeigte, dass es unter den einem Dreiseit eingeschriebenen Parabeln im allgemeinen sechs Kurven gleich grossen Parameters giebt und drei Kurven, für die der Parameter ein Maximum ist; jede Seite und die Verlängerungen der jeweilig beiden übrigen Seiten werden von zwei Parabeln mit gegebenen und von einer Parabel mit maximalem Parameter berührt[398]).

64. Scharen von Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkt. Unter den Scharen mit zwei reellen und zwei imaginären Grundtangenten ist diejenige bemerkenswert, bei der die imaginären Tangenten durch ein zirkulares Geradenpaar gebildet werden, dessen Schnittpunkt nun (Nr. **29**) einen Brennpunkt F der Scharkurven darstellt („monofokale Schar"). *J. Keller* hat diese Schar unter Anwendung räumlicher Betrachtungen näher untersucht[399]). Wird noch eine weitere Tangente gegeben, so ist der Kegelschnitt eindeutig bestimmt; *Steiner* zeigte, welche Lage dann F haben müsse, damit der Kegelschnitt eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel sei[400]). *J. Todhunter* stellte den Satz auf,

J. f. Math. 55 (1858), p. 371 = Werke 2, p. 677 f., ohne Beweis). Zum Beweis, dass die Axe von p eine Fusspunktgerade von Δ' ist, vgl. *K. Dörholt,* Diss. inaug. Münster 1884, p. 87 f.; *C. Intrigila,* Giorn. di mat. 23 (1884), p. 264; *O. Rupp,* Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 145 f.

395) *P. Serret,* Nouv. ann. (2) 9 (1870), p. 79.

396) *Intrigila,* a. a. O. p. 264—270.

397) Wenn nämlich zwei einem Dreieck ABC umschriebene und sich noch in D schneidende Parabeln zu einander rechtwinklige Axen haben, so können diese als Asymptoten einer dem parallel eingeschriebenen Dreiseit Δ'' umschriebenen gleichseitigen Hyperbel aufgefasst werden (Mittelpunktskurve des Büschels mit den Grundpunkten A, B, C, D, vgl. Nr. **51**), somit als Fusspunktgeraden von Δ'' oder als Scheiteltangenten zweier dem Dreiseit Δ'' eingeschriebenen Parabeln. Vgl. auch *Intrigila,* a. a. O.; *A. Cazamian,* Nouv. ann. (3) 13 (1894), p. 318. Weitere Litteratur zur dreispitzigen Hypocykloide in Nr. **55**.

398) Anal. Entw. 2, p. 215—220. 399) Zürich. Viert. 32 (1887), p. 58—79.

400) J. f. Math. 2 (1827), p. 96 und 191 = Werke 1, p. 128 und 134; Ann. de math. 19 (1828), p. 47 = Werke 1, p. 198; *Steiner-Geiser,* p. 157 f.; *Gundel-*

dass, wenn der eine Brennpunkt der einem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitte eine Gerade durchläuft, der andere auf einer dem Dreiseit umschriebenen C_2 fortrückt. Überhaupt entspricht einer vom einen Brennpunkt durchlaufenen C_n eine C_{2n}, die der andere Brennpunkt beschreibt, und beide Kurven sind durch jene einfache quadratische Transformation verbunden, bei der die Produkte $x_i x_i'$ der Koordinaten entsprechender Punkte („Gegenpunkte") P, P' konstant sind (häufig als *Steiner*'sche Transformation bezeichnet)[401]).

65. Konfokale Kegelschnitte. Besonders wichtig ist diejenige Kegelschnittschar

$$\mu \cdot \varphi(u, u) - \omega(u, u) = 0, \tag{44}$$

bei welcher die Grundtangenten durch die vom imaginären Kreispunktepaar $\omega(u, u) = 0$ an irgend eine Kurve $\varphi(u, u) = 0$ der Schar gezogenen Tangenten gebildet werden. Hier haben alle Scharkurven dieselben reellen und imaginären Brennpunkte, sie sind *konfokal*; natürlich sind sie auch konzentrisch und koaxial, d. h. ihre Axen fallen auf einander[402]). Ausser den zwei Brennpunktepaaren gehören die imaginären Kreispunkte als drittes Punktepaar der Schar an[403]). Die kubische Gleichung $\Gamma(\mu) = 0$ für die Parameter μ der in (44)

finger, Vorl., p. 349 ff. Für die Gl. des einem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitts, von dem ein Brennpunkt gegeben ist, vgl. *Salmon-Fiedler,* p. 746; für die Konstruktion der Direktrix von F, des Mittelpunktes und des zweiten Brennpunktes vgl. *Plücker,* Anal. Entw. 2, p. 135 f.

401) *Todhunter,* „A treatise on plane coordinate geometry", London 1855; in der 9. Aufl. (1888), p. 304. Bewiesen wurde der Satz von *W. S. Burnside,* Quart. J. 8 (1865), p. 34 f. Wie bei *Steiner*'scher Transformation der einem gegebenen Punkt entsprechende zu konstruieren ist, findet man bei *Steiner,* Ann. de math. 19 (1828), p. 44 = Werke 1, p. 196; vgl. auch Syst. Entw. § 59. Analytisch gelangte zuerst *L. J. Magnus,* J. f. Math. 8 (1832), p. 54 zu dieser Transformation. Weitere hierher gehörige Sätze bei *Cayley,* Quart. J. 4 (1860), p. 131—133 = Coll. papers 4, p. 481—483 und *C. Doehlemann,* Zeitschr. Math. Phys. 32 (1886), p. 120—127. — Entsprechende Sätze für die Brennpunkte der einem Tetraeder eingeschriebenen Rotationsflächen 2. Grades finden sich bei *W. Fr. Meyer,* Arch. Math. Phys. (3) 5 (1903), Heft 1, 2.

402) Bei franz. Math. meist homofocal, ein Ausdruck, den *G. Lamé* einführte bei dem analogen System von F_2' (Paris Mém. prés. par divers savants 5 (1838), p. 184 = J. de math. 2 (1837), p. 156); auch biconfocal wird gebraucht, z. B. von *E. de Jonquières,* „Mélanges de géom. pure", Paris 1856, p. 74 ff. Konfokale Kegelschnitte kommen wohl zuerst bei *Maclaurin* vor („A treatise of fluxions", 1. Aufl. 1742, § 648; 2. Aufl. 2, London 1801, p. 127).

403) Man kann überhaupt mit *Chasles,* Aperçu hist., Brüssel 1837, Note 31 = Deutsche Übers. von *L. A. Sohncke,* Halle 1839, p. 416 das imaginäre Kreispunktepaar als ein drittes, allen Kegelschnitten der Ebene zugehöriges Brennpunktepaar betrachten. Vgl. auch *Steiner-Schröter,* p. 188 und 431.

enthaltenen Punktepaare hat nun eine Wurzel $\mu = 0$; je nachdem die Gleichung drei verschiedene Wurzeln besitzt oder eine nicht verschwindende Doppelwurzel oder eine verschwindende Doppelwurzel, hat man drei Arten konfokaler Systeme zu unterscheiden. Unter Benutzung rechtwinkliger Linienkoordinaten u, v und eines Parameters λ kann die Gleichung des ersten Systems in die Gestalt:

$$(45) \qquad (a^2 - \lambda)u^2 + (b^2 - \lambda)v^2 - 1 = 0,$$

die des zweiten in die Gestalt:

$$(46) \qquad (a^2 - \lambda)u^2 + (a^2 - \lambda)v^2 - 1 = 0$$

gebracht werden; das erste besteht aus Ellipsen und Hyperbeln, das zweite aus konzentrischen Kreisen; die Gleichung des dritten, aus konfokalen Parabeln bestehenden Systems kann in die Gestalt:

$$(47) \qquad pv^2 - 2u - \lambda(u^2 + v^2) = 0$$

gebracht werden[404]). Von besonderem Interesse ist nur der erste und dritte Fall. In jedem derselben schneiden sich die zwei durch irgend einen Punkt P gehenden Kegelschnitte der konfokalen Schar in P rechtwinklig; denn die in P gezogenen Tangenten der zwei Kurven liegen nach Nr. **57** harmonisch zu allen von P an Kegelschnitte der Schar gezogenen Tangenten, sind daher auch harmonische Polaren des Kreispunktepaares, somit zu einander rechtwinklig. Elementar folgt die Orthogonalität sofort daraus, dass die in P an beide Kurven gezogenen Tangenten den Winkel bezw. Nebenwinkel der Brennstrahlen von P halbieren. Zugleich folgt, dass die Winkel der Tangentenpaare, die man von irgend einem Punkt P an die Kegelschnitte einer konfokalen Schar, speziell auch an das reelle Brennpunktepaar legen kann, dieselbe Halbierungslinie haben, bestehend aus der einen oder anderen Tangente der zwei durch P gehenden Kurven der Schar (vgl. auch Nr. **30**).

Betrachten wir zunächst das erste System näher. In Punktkoordinaten lautet seine Gleichung:

$$(48) \qquad \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0,$$

und hierbei sei $a > b$. Solchen Parameterwerten λ_1, für die $-\infty < \lambda < b^2$, entsprechen alsdann Ellipsen; Hyperbeln erhält man für $b^2 < \lambda < a^2$, imaginäre Kurven für $a^2 < \lambda < \infty$. Den Werten $\lambda = b^2$, $\lambda = a^2$ entsprechen bei Linienkoordinaten (45) das reelle bezw. imaginäre Brennpunktepaar, $\lambda = \pm\infty$ liefert das imaginäre Kreispunktepaar; ist das System in Punktkoordinaten gegeben, so entsprechen den eben

404) Vgl. z. B. die Darstellung bei *Gundelfinger,* Vorl., p. 165—177, wo rein algebraisch gezeigt wird, dass andere Fälle nicht auftreten können.

genannten Ausartungen die zugehörigen Träger, also die Axen, bezw. die Gerade g_∞, und zwar doppelt zählend[405]). Die Parameter der zwei durch einen Punkt x_1, y_1 gehenden konfokalen Kegelschnitte ergeben sich aus der in λ quadratischen Gleichung $(b^2 - \lambda)x_1^2 + (a^2 - \lambda)y_1^2 - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0$, deren Wurzeln zwischen $-\infty$ und b^2, bezw. b^2 und a^2 gelegen sind; die eine Kurve ist daher eine Ellipse, die andere eine Hyperbel[406]). Konfokale Kegelschnitte verschiedener Art, die in (48) enthalten sind, schneiden sich nur in reellen, solche gleicher Art in imaginären Punkten (Fig. 13).

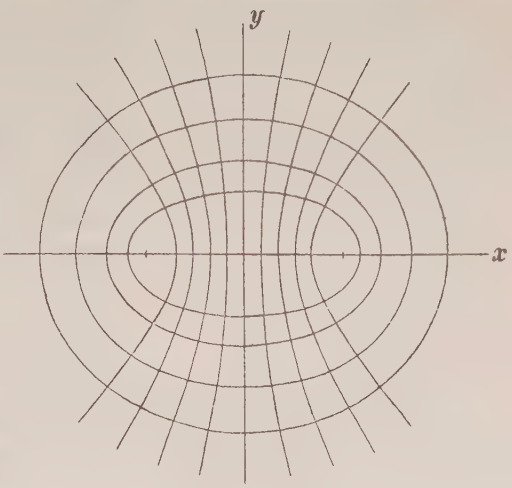

Fig. 13.

Das dritte oben erwähnte System (47) oder in Punktkoordinaten

$$y^2 - 2(p - \lambda)x + \lambda(p - \lambda) = 0 \tag{49}$$

besteht aus Parabeln, die sämtlich die Gerade $y = 0$ zur Axe haben; die in der Schar befindlichen Punktepaare sind das imaginäre Kreispunktepaar (doppelt zählend) und das Paar der gemeinsamen Brennpunkte, deren einer im Unendlichen liegt. Auch jetzt lassen sich

405) *J. Binet,* J. éc. polyt. 9 (1811), p. 57—63; J. de math. 2 (1837), p. 249—252. Vgl. ferner *Chasles,* Ann. de math. 18 (1828), p. 275; *G. Lamé* [402]), p. 185 bezw. 157; *Hesse,* „Vorl. über analyt. Geom. des Raumes", 1. Aufl. Leipzig 1861, p. 243 f., 3. Aufl. (1876), p. 290 f.; *C. G. J. Jacobi,* „Vorl. über Dynamik", hrsgg. von *Clebsch,* Berlin 1866, p. 207 f. — Die verschiedenen Fälle der Systeme von Kegelschnitten, die sich in vier Punkten rechtwinklig schneiden, betrachten *P. Appell,* Arch. Math. Phys. 63 (1878), p. 50—55, ferner *H. M. Taylor,* Quart. J. 26 (1893), p. 148—155, sowie *G. T. Benett,* ebenda, p. 155—157.

406) Für konfokale Flächen 2. Ordn. bei *Ch. Dupin,* „Développements de géométrie", Paris 1813, p, 269—271. Die Wurzelintervalle für Gl. beliebigen Grades obiger Art, also mit beliebig vielen Gliedern, wurden zuerst von *Jacobi* bestimmt, J. f. Math. 12 (1833), p. 25 = Werke 3, p. 219 f. *G. Battaglini,* Giorn. di mat. 30 (1892), p. 287—299 betrachtet ein System von Kegelschnitten, das die konfokalen als speziellen Fall enthält; bei ihm sind die Kurven auch koaxial, aber die Quadrate der Axen sind gebrochene rationale Funktionen eines Parameters λ. *H. Mylord* betrachtet das Kurvensystem, das eine Schar konfokaler Kegelschnitte unter beliebig aber fest gegebenem Winkel schneidet (Tidskrift (3) 1 (1871), p. 33).

zwei Arten von Kurven der Schar unterscheiden, indem sich je nach dem Vorzeichen von $p - \lambda$ die Kurven nach entgegengesetzten Seiten öffnen; durch jeden Punkt P der Ebene geht eine Kurve von jeder Art, während sich Parabeln derselben Art nicht in reellen Punkten schneiden. Gehört P insbesondere dem im Brennpunkt auf der Axe errichteten Lote an, so sind die zugehörigen Parabeln kongruent[407]) (Fig. 14).

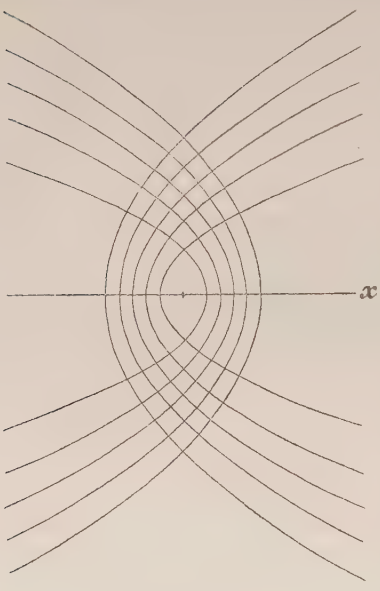

Fig. 14.

Eine einfache Erzeugungsweise konfokaler Kegelschnitte gründet sich auf den in Nr. **29** erwähnten Satz, dass die Fusspunkte der von den Brennpunkten eines Kegelschnitts auf dessen Tangenten gefällten Lote den über der Hauptaxe als Durchmesser konstruierten Kreis erfüllen. Schneidet man nämlich einen Kreis mit den Strahlen eines Büschels (Mittelpunkt F) und errichtet in den Schnittpunkten auf den Strahlen Lote, so umhüllen diese paarweise parallelen Lote einen mit dem Kreis konzentrischen Kegelschnitt, der F zum Brennpunkt hat, und zwar eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem F innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt. Einem System konzentrischer Kreise entspricht auf solche Art ein System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln. Ersetzt man die Kreise durch parallele Geraden, so besteht das zugehörige Kegelschnittsystem aus konfokalen Parabeln[408]).

66. Elliptische Koordinaten. Satz von Ivory. Da sich in jedem Punkt P der Ebene eines Systems konfokaler Ellipsen und Hyperbeln zwei Kurven verschiedener Art schneiden, kann man nach *G. Lamé*[402]) die Parameter λ_1, λ_2 dieser zwei Kurven als „elliptische Koordinaten" von P einführen; sie bestimmen allerdings die Lage von P erst dann eindeutig, wenn noch angegeben wird, in welchem der vier Quadranten P liegen soll. Man hat[409]):

407) *Hesse,* 7 Vorl., p. 48—52 = Zeitschr. Math. Phys. 19 (1874), p. 48—52.

408) *J. H. Lambert* und *M. R. de Prony*[153]), sowie *Reye,* Geom. d. Lage, p. 176 und 179.

409) *Jacobi* giebt die analogen, wie überhaupt die wichtigsten Formeln für elliptische Koordinaten im Raume von n Dimensionen („Vorl. über Dynamik", hrsgg. von *Clebsch*; 2. Ausg. in den ges. Werken, Supplementband, p. 199—211,

$$(50) \qquad x^2 = \frac{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)}{a^2-b^2}, \quad y^2 = \frac{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}{b^2-a^2},$$

und das Quadrat des Radiusvektors wird[410]):

$$(51) \qquad x^2+y^2 = a^2-\lambda_1+b^2-\lambda_2.$$

Ebenso kann man die Werte $\lambda = \lambda_1$ bezw. λ_2 bei zwei ungleich gerichteten Parabeln des Systems (49) als parabolische Koordinaten ihrer zwei im Endlichen liegenden Schnittpunkte einführen[411]); die Bestimmung von P wird eindeutig, wenn noch angegeben wird, welche Lage P in Bezug auf die x-Axe haben soll. Man hat:

$$(52) \qquad x = \frac{\lambda_1+\lambda_2-p}{2}, \quad y^2 = -(p-\lambda_1)(p-\lambda_2).$$

Betrachten wir nun irgend zwei Ellipsen des Systems (48), die eine etwa mit den Halbaxen a, b, die andere mit den Halbaxen $\sqrt{a^2-\lambda}$, $\sqrt{b^2-\lambda}$. Zwei Punkte P, Q dieser Kurven mit den Koordinaten $x = a\alpha$, $y = b\beta$ bezw. $x = \alpha\sqrt{a^2-\lambda}$, $y = \beta\sqrt{b^2-\lambda}$, wobei $\alpha^2+\beta^2 = 1$, heissen alsdann nach *J. Ivory* korrespondierende Punkte. Hat man noch zwei andere korrespondierende Punkte P', Q' mit den Koordinaten $a\alpha'$, $b\beta'$ bezw. $\alpha'\sqrt{a^2-\lambda}$, $\beta'\sqrt{b^2-\lambda}$, wo $\alpha'^2+\beta'^2 = 1$, so ist nach *Ivory* und *Chasles* $PQ' = P'Q$.[412]) Der Satz gilt auch für Hyperbeln, nur sind dann b, β, β' zu ersetzen durch bi, βi, $\beta' i$.

Berlin 1884; die Vorl. wurden im Winter 1842/43 gehalten). *Lamé*, „Leçons sur les coordonnées curvilignes", Paris 1859 berücksichtigt nur $n = 3$. Weitere ausführliche Darstellungen der ellipt. Koord. gaben *Hesse*, „Vorl. über analyt. Geom. des Raumes", 3. Aufl. (1876), p. 283—337; *Clebsch*, „Vorl. über Geometrie", bearb. von *F. Lindemann*, Bd. 2, Leipzig 1891, p. 269—289; *O. Staude*, „Die Fokaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung", Leipzig 1896, p. 22—37 und 162—178. *W. S. Burnside*, Quart. J. 7 (1865), p. 229 untersuchte den Zusammenhang zwischen den elliptischen und den gewöhnlichen Dreieckskoordinaten eines Punktes.

410) *Jacobi* a. a. O. p. 220; vgl. auch *Cayley*, Cambr. Dubl. math. J. 1 (1846), p. 207 = Coll. papers 1, p. 253.

411) Vgl. z. B. *O. Staude* a. a. O. p. 171—176. Für die analogen Systeme von F_2 im Raume vgl. *Lamé*, J. de math. 8 (1843), p. 432—434, sowie (2) 19 (1874, geschrieben 1843 oder 1844), p. 311—318.

412) Lond. Trans. Jahrg. 1809[1], p. 355 = Ostw. Klass. Nr. 19, p. 32. Ausgesprochen hat *Ivory* diese Eigenschaft freilich a. a. O. nicht, doch war sie ihm jedenfalls bekannt. *Jacobi* hat mit Hülfe des Satzes, den er als Satz von *Ivory* bezeichnet, mehrere Theoreme über Kegelschnitte bewiesen, so z. B. den Satz von der konstanten Summe oder Differenz der Brennstrahlen (J. f. Math. 12 (1834), p. 138—140 = Werke 7, p. 8—10; Bruchstücke aus *Jacobi*'s Nachlass von *O. Hermes* mitgeteilt J. f. Math. 73 (1871), p. 180—206 = Werke 7, p. 43—68). Auch löst er die Aufgabe, um zwei beliebige Dreiecke ABC, $A'B'C'$ zwei konfokale Kegelschnitte zu beschreiben, in denen A und A', B und B', C und

67. Sätze von Chasles. Zahlreiche Sätze über konfokale Kegelschnitte leitet *Chasles* aus vier allgemeinen Haupttheoremen durch spezielle Annahmen ab[413]); seine Sätze beziehen sich allerdings eigentlich auf konfokale sphärische Kegelschnitte, lassen sich jedoch sofort auf ebene übertragen. Diese Haupttheoreme lauten:

1. A und A' seien zwei konfokale Kegelschnitte, U ein beliebiger Kegelschnitt; werden nun den Vierseiten[414]) $\boxed{UA}$ und $\boxed{UA'}$ irgend zwei Kegelschnitte B bezw. B' eingeschrieben, so ist das Vierseit $\boxed{BB'}$ einem Kegelschnitt umschrieben, der mit A und A', sowie einem, der mit U konfokal ist.

2. Wird (bei gleicher Bedeutung von A, A', U) dem Vierseit $\boxed{UA}$ ein Kegelschnitt B eingeschrieben, so lässt sich dem Vierseit $\boxed{UA'}$ ein mit B konfokaler Kegelschnitt B' einschreiben.

3. A, A', A'' seien drei konfokale, U ein beliebiger Kegelschnitt; werden den Vierseiten $\boxed{UA}$, $\boxed{UA'}$ zwei Kegelschnitte B, bezw. B' eingeschrieben, so sind die Vierseite $\boxed{UA''}$ und $\boxed{BB'}$ einem und demselben Kegelschnitt B'' umschrieben.

4. Es seien A, B, C drei Kegelschnitte einer und derselben Schar; A' sei mit A, B' mit B konfokal. Alsdann lässt sich dem Vierseit $\boxed{A'B'}$ eine mit C konfokale Kurve C' einschreiben, und die Seiten von $\boxed{ABC}$ und $\boxed{A'B'C'}$ berühren einen und denselben Kegelschnitt.

Von den zahlreichen Folgerungen aus diesen Sätzen seien nur wenige erwähnt. Lässt man z. B. in 1) U in einen doppelten Punkt P ausarten, B und B' in die Berührungspunkte der von U an A bezw. A' gelegten Tangenten, so folgt: Zieht man von einem Punkte P an zwei konfokale Kegelschnitte A und A' die Tangenten und verbindet man die auf A gelegenen Berührungspunkte mit den auf

---

C' korrespondierende Punkte sind. Einen analytischen Beweis des *Ivory*'schen Satzes giebt *Chasles,* J. de math. 5 (1840), p. 467 und 485—487 = Ostw. Klass. Nr. 19, p. 77 und 93—95; vgl. auch Paris C. R. 6 (1838), p. 903; *J. Waille,* Nouv. ann. (2) 14 (1875), p. 5—10. Einfache Beweise des *Ivory*'schen und verwandter Sätze, sowie ihrer Umkehrungen, für F_2 im Raume von n Dimensionen, giebt *W. Fr. Meyer,* Königsberg i/P., Phys.-ökon. Ges. Ber. 1900, p. 24—38.

413) Paris C. R. 50 (1860), p. 626—633 = J. de math. (2) 5 (1860), p. 429—438.

414) Durch $\boxed{UA}$ bezeichnet *Chasles* das den Kegelschnitten U und A gemeinsam umschriebene Vierseit.

A' gelegenen, so sind diese Verbindungslinien Tangenten eines mit A und A' konfokalen Kegelschnitts sowie eines Kreises mit dem Mittelpunkte P.[415]) Gehen in 2) die Kurven A und U eine doppelte Berührung ein und stellt B den Pol der Berührungssehne dar, so folgt: Sind A, A' zwei konfokale Kegelschnitte, deren einer A von einem Kegelschnitt U doppelt berührt wird, so ist das Vierseit $\boxed{UA'}$ einem Kreis umschrieben, dessen Mittelpunkt sich im Pol der Berührungssehne befindet. Geht U in ein auf A gelegenes Punktepaar über, so folgt: Die von zwei Punkten U_1, U_2 eines Kegelschnitts A an eine konfokale Kurve A' gezogenen Tangenten berühren einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Schnittpunkt der in U_1, U_2 an A gezogenen Tangenten liegt[416]).

68. Polarkegelschnitt der konfokalen Schar. Die in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schar genommenen Pole einer Geraden g erfüllen (Nr. 57) wieder eine Gerade g_1; bei einer konfokalen Schar sind beide zu einander rechtwinklig, denn der Pol von g in Bezug auf das imaginäre Kreispunktepaar liegt auf g_∞ in einer zu g normalen Richtung. Überhaupt sind zwei zu einander rechtwinklige Geraden bezüglich der konfokalen Schar konjugiert, wenn sie die Brennpunkte harmonisch trennen. Der Kegelschnitt N (Enveloppe der Polaren eines Punktes P in Bezug auf die Scharkurven) ist nun eine Parabel, denn N berührt die Träger der Punktepaare der Schar, also auch g_∞. Ferner berührt N das Axenpaar sowie die in P gezogenen Tangenten der zwei durch P gehenden Scharkurven. Da sich die Geraden eines jeden dieser Paare rechtwinklig schneiden, ist die Ver-

415) Hier möge noch folgender von *Bobillier*, Ann. de math. 19 (1828), p. 321—323 gefundene Satz erwähnt werden: Umhüllen die Schenkel eines rechten Winkels je einen von zwei konfokalen Kegelschnitten, so beschreibt sein Scheitel einen mit den zwei Kurven konzentrischen Kreis, der sich im Falle zweier konfokaler Parabeln auf deren Schnittsehne reduziert. Man sieht zugleich, dass, wenn jeder von zwei beweglichen konfokalen Kegelschnitten je einen Schenkel eines rechten Winkels berührt, ihr gemeinsamer Mittelpunkt um den Scheitel des Winkels einen Kreis beschreibt. Vgl. auch Nouv. ann. 8 (1849), p. 214 ohne Autorangabe, sowie *J. Harel*, ebenda p. 234 f.

416) Diesen Satz hat *Chasles* schon Paris C. R. 17 (1843), p. 841 gegeben; vgl. auch *Darboux*, „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques", Paris 1873, p. 203. Der spezielle Fall, dass A' aus dem Brennpunktepaar von A besteht, wurde bereits in Fussnote 152 erwähnt. Eine Umkehrung des Satzes beweist *Reye*: Die vier gemeinsamen Tangenten eines beliebigen Kegelschnitts k und eines Kreises bilden ein Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken auf drei mit k konfokalen Kegelschnitten liegen (Zürich. Viert. 41 (1895), p. 68 f. oder Geom. d. Lage, p. 181 f.). Unter allgemeinerem Gesichtspunkt erscheinen diese und verwandte Sätze bei *E. Müller*, Deutsche Math.-Ver. Ber. 12 (1903), p. 105.

bindungslinie von P mit dem Mittelpunkte der konfokalen Schar nach Nr. **16** die Direktrix der Parabel N.[417]).

69. Weitere Sätze von Chasles, vergleichbare Bögen. Mit Hülfe des oben (Nr. **67**) erwähnten Satzes von *Chasles*, dass die von zwei Punkten eines Kegelschnitts an eine konfokale Kurve gezogenen Tangenten einen Kreis berühren, hat *Reye*[269]) mehrere von *Chasles*[267]) mitgeteilte Sätze über „vergleichbare Bögen" (Nr. **42**) bewiesen. Aus dem gleichfalls schon erwähnten Satze, dass die Differenz zweier vergleichbaren Bögen gleich der Differenz der zugehörigen Schenkelsummen ist, folgt: Wird ein um eine Ellipse e gelegter geschlossener Faden durch einen Stift S in der Ebene von e gespannt erhalten, so beschreibt S eine konfokale Ellipse[418]). Lässt man die Ellipse e auf die ihre Brennpunkte verbindende Strecke zusammenschrumpfen, so folgt sofort die schon in Nr. **2** (Fussnote 6) erwähnte Fadenkonstruktion einer beliebigen Ellipse. Haben die vergleichbaren Bögen eines Kegelschnitts k einen Endpunkt Q gemeinsam, so ist ihre Differenz gleich der Differenz der den zwei anderen Endpunkten zugehörigen Schenkel[419]). Der Schnittpunkt derselben liegt mit Q auf einem

417) N ist die *Steiner*'sche Parabel von P (vgl. Nr. **33** und **36**, sowie *Steiner-Schröter*, p. 340). Sind A und B die Berührungspunkte der von P an irgend eine Kurve der Schar gelegten Tangenten, so gehen die Umkreise aller solcher Dreiecke PAB ausser durch P noch durch einen zweiten festen Punkt, den Brennpunkt der zu P gehörigen *Steiner*'schen Parabel. Ebenso gehen alle durch P, die Brennpunkte der Schar und durch Punktepaare wie A, B gelegten Kegelschnitte noch durch einen weiteren festen Punkt (*J. Wolstenholme*, Quart. J. 10 (1870), p. 285—288). Der Ort für die Schnittpunkte der in A und B errichteten Normalen ist eine Gerade, die durch die zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkte der sich in P schneidenden Scharkurven geht (*E. Laguerre*, Nouv. ann. (2) 18 (1879), p. 57—64). Die Fusspunkte der Projektionen von P auf die einzelnen Polaren erfüllen eine rationale zirkulare C_3 [III C 3] mit rechtwinkligen Doppelpunktstangenten (*A. Cazamian*, Nouv. ann. (3) 12 (1893), p. 397); dieselbe ist auch Ort aller Punkte A, B (*Steiner-Schröter*, p. 442). Rückt P ins Unendliche, so zerfällt die C_3 in eine gleichseitige Hyperbel und g_∞; zahlreiche auf diesen Fall bezügliche Sätze giebt *P. Volpicelli*, Paris C. R. 62 (1866), p. 1337—1339; 63 (1866), p. 652 f. und 956; Rom Atti nuovi Lincei 19 (1866), p. 26—37, 53—82, 149—171, 219—243, 268—305. Vgl. auch *Goffart*, Nouv. ann. (3) 2 (1883), p. 353 f., sowie bezüglich gewisser Prioritätsansprüche *E. Lommel*, Zeitschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 276 f. und *J. A. Serret*, J. de math. 8 (1843), p. 498.

418) Mit Hülfe ellipt. Koordinaten bewiesen bei *Hesse*, „Vorl. üb. anal. Geom. d. Raumes", 3. Aufl. 1876, p. 297 f.; ein anderer Beweis bei *Reye*[269]). Ein weit allgemeinerer Satz findet sich in einem Briefe von *G. W. Leibniz* an *Joh. Bernoulli* (1704, *Leibniz*, Ges. Werke, hrsgg. von *G. H. Pertz*, Math. Schriften, hrsgg. von *C. J. Gerhardt*, 3^2, Halle 1856, p. 733 und 734—736).

419) Mit Hülfe dieses Satzes, der sich im wesentlichen schon bei *J. Mac Cullagh* (Dublin Exam. papers 1841, p. 41; 1843, p. 68 und 83; Dublin

zu k konfokalen Kegelschnitt k_1, und beide Schenkel sind Tangenten eines Kreises, der k in Q berührt[420]). Von weiteren Sätzen, die *Chasles* giebt, erwähnen wir nur die folgenden: Wird eine Ellipse e_1 in m vergleichbare Bögen geteilt, so liegen die Ecken des durch die Tangenten der Teilpunkte gebildeten umschriebenen m-Ecks auf einer konfokalen Ellipse e_2, die dieselbe bleibt, wenn man die Teilpunkte, somit auch das Polygon, unter Beibehaltung der Zahl m der vergleichbaren Bögen ändert. Alle diese Polygone haben gleichen Umfang, der der kleinste ist unter den Umfängen aller e_1 umschriebenen m-Ecke, der grösste für die der Ellipse e_2 eingeschriebenen m-Ecke[420]). Ist umgekehrt irgend ein Polygon einer Ellipse e_2 eingeschrieben, einer konfokalen e_1 umschrieben, so hat sein Umfang die eben erwähnten Eigenschaften, und seine auf e_1 gelegenen Berührungspunkte bestimmen daselbst vergleichbare Bögen. Solcher Polygone giebt es unendlich viele, und sie haben alle gleichen Umfang. Zieht man aus einem auf e_2 gelegenen Punkte P die beiden Tangenten an e_1, so sind diese (Nr. 30) gegen die Brennstrahlen von P unter gleichem Winkel geneigt, ihr Winkel wird daher durch die Normale von P halbiert, und hieraus folgt, dass ein an der konkaven Seite einer Ellipse wiederholt reflektierter Lichtstrahl in allen seinen Lagen eine

---

Proc. 2, p. 508 = Coll. works, Dublin und London 1880, p. 319 f.) findet, lässt sich ein Bogen in zwei vergleichbare Teile zerlegen. *Ch. Graves* erwähnt in Bemerkungen, die er seiner Schrift „Two geom. memoirs on the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics by *M. Chasles*", Dublin 1841, p. 77 angereiht hat, dass die Summe der zwei Tangenten, die von irgend einem Punkt einer Ellipse an eine konfokale Ellipse gezogen werden und des zwischen den Berührungspunkten gelegenen gegen P konkaven Bogens konstant ist, ein Satz, der sofort die oben erwähnte Fadenkonstruktion konfokaler Ellipsen liefert. Einen elementaren Beweis der Sätze von *Graves* und *Mac Cullagh* hat *J. Griffiths*, Lond. math. soc. Proc. 13 (1882), p. 177 f. gegeben. Zur Geschichte dieser Sätze vgl. *Chasles*, J. de math. 11 (1846), p. 123. Vgl. ferner *G. Humbert*, Nouv. ann. (3) 7 (1888), p. 5—8, sowie *F. Klein*, Vorl. über höh. Geom. 1, Göttingen 1893, p. 67 f., wo besonders auf die entsprechende, von *O. Staude* herrührende Fadenkonstruktion der Flächen 2. Ordnung [III C 4] eingegangen wird.

420) Vgl. hier ausser *Chasles* auch *Steiner*, J. f. Math. 37 (1847), p. 189 f. = Werke 2, p. 418; *C. Küpper*, J. f. Math. 63 (1863), p. 40—57; *F. X. Stoll*, Zeitschr. Math. Phys. 33 (1887), p. 90 ff. Es seien hier noch zwei von *Steiner* aufgestellte spezielle Sätze erwähnt: Sind a, b und a_1, b_1 die Axen zweier konfokalen Ellipsen e, e_1 und ist $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1$, so giebt es unendlich viele Dreiecke, die der Ellipse e eingeschrieben und zugleich e_1 umschrieben sind. Ist $a^2 : b^2 = a_1 : b_1$, so giebt es unendlich viele Vierecke dieser Beschaffenheit, J. f. Math. 49 (1852), p. 277 = Werke 2, p. 619. Vgl. auch Fussnote 89.

konfokale Ellipse berührt. Gelangt der Strahl nach n Reflexionen in seine ursprüngliche Lage, so hat das durch die Strahlen gebildete geschlossene n-Eck denselben Umfang, gleichgültig welche Lage der erste Lichtstrahl hatte. Analoges gilt, wenn der Strahl nicht an einer und derselben Ellipse, sondern der Reihe nach an n konfokalen Ellipsen reflektiert wird, das entstehende n-Eck hat konstanten, von der Lage des ersten Strahles unabhängigen Umfang. Eine rein geometrische Behandlung dieser Sätze und insbesondere ihrer Ausdehnung auf quadratische Mannigfaltigkeiten M_{n-1}^2 in Räumen R_{n-1}, wobei alle Rechnung vermieden, lediglich das *Abel*'sche Theorem für hyperelliptische Integrale (II B 5) geometrisch interpretiert wird, hat *F. Klein* gegeben, und *J. Sommer* hat speziell den Fall der konfokalen $M_3{}^2$ im R_4 behandelt[421]). In den oben mitgeteilten Sätzen hat eine andere Reihe von Sätzen über konfokale Kegelschnitte ihren Ursprung, die *Chasles* im Anschluss an eine Gleichung $F(\mu) \mp F(\mu') = F(\varphi) \mp F(\varphi')$ gewinnt, der die Amplituden von vier elliptischen Funktionen 1. Gattung unterworfen werden, sowie im Anschluss an die Gleichung

$$\cos\varphi \cdot \cos\varphi' \mp \sin\varphi \cdot \sin\varphi' \cdot \sqrt{1 - c^2 \sin^2\mu} = \cos\mu,$$

die zwischen den Amplituden dreier elliptischen Funktionen 1. Gattung stattfindet, wenn die eine dieser Funktionen gleich der Summe oder Differenz der beiden andern ist[422]) [II B 3]. Es sei hier nur folgender Satz erwähnt: Zieht man von jedem Punkt einer Ellipse oder Hyperbel die Tangenten an eine konfokale Ellipse e_1 und legt man von den Schnittpunkten dieser Tangenten mit der Hauptaxe die Tangenten an den über der Hauptaxe von e_1 als Durchmesser beschriebenen Kreis, so bildet jedes solche Tangentenpaar mit der Hauptaxe Winkel φ, φ', die die eben erwähnte Gleichung erfüllen. Dabei ist c die numerische Exzentrizität von e_1, μ hängt von der Grösse der zuerst erwähnten Ellipse oder Hyperbel ab, — oder + steht, je nachdem die eine oder andere Kurvenart vorliegt.

70. Büschelschar sich doppeltberührender Kegelschnitte. Das System von Kegelschnitten, die sich in denselben zwei Punkten A, B berühren, kann offenbar sowohl als Büschel wie als Schar betrachtet werden (Büschelschar[423]). Aus den früheren Sätzen über Büschel

421) *Klein*, Math. Ann. 28 (1886), p. 533ff.; *Sommer*, ebenda 53 (1900), p. 113ff.

422) Paris C. R. 19 (1844), p. 1239—1261. Es ist $F(\mu) = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\mu}}$ in der Schreibweise von *A. M. Legendre*.

423) Bezeichnung von *R. Sturm* in *Steiner-Schröter*, p. 328.

und Scharen kann man jetzt leicht folgende Sätze entnehmen[424]): Die Polaren eines Punktes Q in Bezug auf alle Kurven des Systems gehen durch einen und denselben Punkt der gemeinsamen Berührungssehne s, zugleich vierten harmonischen Punkt zu A, B und zu dem Schnittpunkt von s mit SQ, wo S den Pol der Sehne s, den „Berührungspol“[425]) bezeichnet. Die Pole einer Geraden g in Bezug auf alle Kurven des Systems liegen auf einer durch S gehenden Geraden, der vierten harmonischen zu dem Tangentenpaare SA, SB und zur Verbindungslinie von S mit dem Schnittpunkt von s und g.[426]). Die Mittelpunkte der Kegelschnitte liegen auf der Verbindungslinie von S mit der Mitte der Berührungssehne AB, sowie auf AB selbst[427]). Alle Kurven der Büschelschar haben S und s zu Pol und Polare, die zu S gehörige Involution von Strahlen durch S und die auf s gelegene Involution von Punkten sind für alle Kurven dieselben, beide liegen perspektiv. Demnach kann man die Büschelschar auch so erzeugen: Wenn eine Strahleninvolution mit dem Mittelpunkt M und eine dazu perspektive Punktinvolution mit dem Träger t gegeben sind, bilden alle Kegelschnitte, für welche diese beiden Gebilde die dem Punkte M und der Geraden t zugehörigen Involutionen sind, ein System sich doppelt berührender Kegelschnitte. Sind beide Involutionen hyperbolisch, so berühren sich alle Systemkurven in den reellen Doppelpunkten der Punktinvolution und haben die Doppelstrahlen der anderen Involution zu gemeinsamen Tangenten. Auch wenn jene Involutionen elliptisch sind, ist die Büschelschar reell, die Kurven haben eine imaginäre doppelte Berührung[428]). In beiden Fällen kann man die Kegelschnitte des Systems in zwei Reihen verteilen. Bei reeller doppelter Berührung z. B. wird die eine Reihe (multiform series bei *Cayley*[429])) durch Ellipsen, eine Parabel und durch Hyperbeln gebildet, die sämtlich innerhalb des Winkels ASB (bezw. dessen Scheitelwinkels) liegen; die andere Reihe (uniform series bei *Cayley*) besteht aus Hyperbeln, die in den Nebenwinkeln von ASB verlaufen. Die Übergänge zwischen beiden Reihen werden

424) Vgl. für das Folgende *Chasles*, Sect. con., chap. 19, sowie *Steiner-Schröter*, § 52.

425) Pôle de contact bei *Chasles* a. a. O. p. 324.

426) *Poncelet*, Ann. de math. 12 (1822), p. 248 = Appl. d'anal. 2, p. 527.

427) *Gergonne*, Ann. de math. 11 (1821), p. 385 und 400. Bezüglich des Ortes der Brennpunkte vgl. Nr. **54.**

428) Über die Konstruktion der Systemkurven in diesem Falle vgl. *Steiner-Schröter*, p. 330; ferner *F. Hofmann*, „Die Konstruktionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken“, Leipzig 1886.

429) Quart. J. 3 (1859), p. 246—250 = Coll. papers 4, p. 456—459.

einmal durch das gemeinsame Tangentenpaar, dann durch die Berührungssehne s vermittelt; betrachtet man das System als Liniengebilde, so sind diese Übergänge einmal der Pol S, dann das Punktepaar A, B. — Liegt S im Unendlichen, so wird AB ein Durchmesser aller nun konzentrischen Systemkurven; rückt AB ins Unendliche, so ist S gemeinsamer Mittelpunkt der Systemkurven, und diese sind entweder Hyperbeln mit denselben Asymptoten oder konzentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen; insbesondere kann auch das System aus konzentrischen Kreisen bestehen[430]).

Greift man zwei Kurven k und k_1 einer Büschelschar heraus, so folgt unter Anwendung der elementarsten Sätze über Pol und Polare: Zieht man an k zwei Tangenten t, t_1, die k_1 in den Punktepaaren x, ξ und x_1, ξ_1 treffen, so liegt von den Schnittpunkten $(x x_1, \xi \xi_1)$ und $(x \xi_1, x_1 \xi)$ der eine auf s, der andere ebenso wie $(x \xi, x_1 \xi_1)$ auf der durch S gehenden Polare des ersten. Wird t_1 festgehalten, t längs k bewegt, so beschreiben die Punktepaare x, ξ, in denen t die Kurve k_1 trifft, auf k_1 zwei projektive krumme Punktreihen (durch Verbinden der x bezw. ξ mit zwei Punkten P_1 und Q_1 von k_1 erhält man zwei projektive Strahlenbüschel), und auch der auf k gelegene Berührungspunkt von t beschreibt eine zu den zwei eben erwähnten projektive krumme Punktreihe. Bei zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten wird somit immer der eine von den Tangenten des anderen projektiv geschnitten. Umgekehrt umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier auf einem Kegelschnitt k_1 gelegenen krummen projektiven Punktreihen einen Kegelschnitt k, der k_1 doppelt berührt. — Dual bilden die Tangenten eines Kegelschnitts k_1 ein krummes Tangentenbüschel; dasselbe trifft eine feste Tangente in einer Punktreihe, die in projektive Beziehung gebracht werden kann zu der auf einer anderen festen Tangente ausgeschnittenen Punktreihe der Art, dass sich die Tangenten von k_1 paarweise entsprechen und man längs k_1 zwei krummlinige Tangentenbüschel erhält. Die Schnittpunkte entsprechender Tangenten erfüllen einen Kegelschnitt, der k_1 doppelt berührt. Diese Projektivität der krummen Punktreihen und krummen Strahlengebilde wurde zuerst eingehend behandelt von *A. Göpel*, der viele Folgerungen aus ihr zog[431]). Er nennt zwei krumme Punktgebilde (Strahlengebilde) projektiv, wenn beide mit

430) *Poncelet*, Traité Nr. 131 und 410 fasste die Büschelschar als Projektion konzentrischer Kreise auf.

431) J. f. Math. 36 (1844), p. 317—356. Die Erzeugnisse krummer projektiver Punktreihen (Strahlen) auf verschiedenen Kegelschnitten sowie auf Kegelschnitt und Gerade betrachtet *H. Schröter*, J. f. Math. 54 (1857), p. 31—47.

einem beliebigen Element des Trägers verbunden (geschnitten) projektive gerade Gebilde erzeugen. Die Projektivität ist durch drei Paare entsprechender Elemente festgelegt, oder auch durch die Verbindungslinie (Richtlinie) bezw. den Schnittpunkt (Richtpunkt) der zwei Doppelelemente und ein Elementenpaar. Von der krummlinigen Projektivität ausgehend bewies *A. Milinowski*[432]) die wichtigsten Eigenschaften der sich doppelt berührenden Kegelschnitte, darunter mehrere Sätze von *Göpel* und *Steiner*[433]).

Die Gleichung eines Systems sich doppelt berührender Kegelschnitte kann bei Punktkoordinaten in die Form gebracht werden:

$$f(x, x) - \lambda \cdot q_x^2 = 0,$$

wo $f(x, x) = 0$ irgend eine Kurve des Systems, $q_x = 0$ die Berührungssehne darstellt, oder auch in die Form $f(x, x) - \lambda r_x \cdot s_x = 0$, wo nun $r_x = 0$ und $s_x = 0$ die zwei gemeinsamen Tangenten darstellen müssen. Die einfachste Gestalt der Gleichung ist $r_x s_x - \lambda q_x^2 = 0$, die entsprechend den sieben in ihr enthaltenen unabhängigen Konstanten auf ∞^2 Arten ermöglicht werden kann[434]). Macht man die eben erwähnten drei Geraden zu Seiten des Koordinatendreiecks, so folgt einfach die „Normalform“ $x_1 x_3 - \lambda x_2^2 = 0$. Analog bei Linienkoordinaten.

C. Gemischte Kegelschnittsysteme.

71. Das System $S(3p, 1g)$. Betrachten wir nun noch einige „gemischte Kegelschnittsysteme“[435]), d. h. Systeme von Kegelschnitten, die irgend vier Bedingungen unterworfen sind, ohne Büschel oder Scharen zu sein, also z. B. Systeme, deren Kurven durch α gegebene Punkte gehen und β gegebene Geraden berühren sollen ($\alpha = 3, 2, 1$, $\beta = 1, 2, 3$), Systeme $S(\alpha p, \beta g)$. Wir beginnen mit $S(3p, 1g)$. Wie *Steiner* das Kegelschnittbüschel aus dem Strahlenbüschel durch „projektive Drehung“ ableitete (Nr. **46**), kann analog das System $S(3p, 1g)$ aus der Gesamtheit der Tangenten eines Kegelschnitts k_0 abgeleitet werden, dual das System $S(3g, 1p)$ aus den Punkten von k_0.[436]) Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kurven des Systems $S(3p, 1g)$, jede Gerade wird von vier Kurven berührt; daher sind

432) Progr. Gymn. Tilsit 1870.

433) *Steiner*, J. f. Math. 45 (1852), p. 212—224 = Werke 2, p. 469—483.

434) Vgl. *Plücker*, System d. Geom., p. 89, 97, 99—100. Die Transformation ist durchgeführt bei *Cayley*, Lond. Trans. 152^2 (1862), p. 641—655 = Coll. papers 4, p. 398—412, in andrer Weise bei *Gundelfinger*, Vorl., p. 83 ff.

435) Bezeichnung bei *Steiner-Schröter*, p. 341.

436) Für Näheres sei auf *Steiner-Schröter* § 53 verwiesen.

vier Parabeln in dem System, auch enthält es zwei gleichseitige Hyperbeln und drei Geradenpaare[436]). *Cayley* untersuchte die Realität der vier eine beliebige Gerade berührenden Kurven; ferner betrachtete er den Ort der Mittelpunkte der Systemkurven, eine C_4, näher[437]). Sie berührt die Seiten des Dreiecks der festen Grundpunkte P_1, P_2, P_3 des Systems in ihren Schnittpunkten mit der festen Geraden g, und jede Seitenmitte dieses Dreiecks ist ein Doppelpunkt der C_4.

Auch alle ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte, die durch einen festen Punkt P_3 gehen und eine feste Gerade g berühren, bilden ein System $S(3p, 1g)$, denn ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte sind solche, die durch dieselben zwei unendlich fernen Punkte P_1, P_2 gehen (Nr. **16**). Die Mittelpunktskurve wird hier eine Parabel, für die P_3 der Pol von g ist; insbesondere im Fall eines Kreissystems hat diese Parabel P_3 zum Brennpunkt, g zur Direktrix[438]). — Ferner bilden die einem Dreieck umschriebenen Parabeln ein System $S(3p, 1g)$.[439])

72. Das System $S(3g, 1p)$ entspricht dual dem $S(3p, 1g)$. Die Mittelpunktskurve m ist ein Kegelschnitt, der die Seiten des dem Dreiseit der Grundtangenten g_1, g_2, g_3 parallel eingeschriebenen Dreiseits berührt[440]). Die Abhängigkeit der Art der Systemkurven von der Lage des gemeinsamen Punktes P wurde von *Steiner* näher untersucht[441]). *Chasles* hat die Betrachtung der durch gewisse Punkte

437) Quart. J. 6 (1864), p. 24—30 = Coll. papers 5, p. 258—264; vgl. auch Cambr. Dubl. math. J. 5 (1850), p. 148—152 = Coll. papers 1, p. 496—499; *G. Bruno,* Tor. Atti 17 (1881), p. 29—34. Die Gleichung der Mittelpunktskurve giebt schon *Gergonne,* Ann. de math. 11 (1821), p. 393—395; vgl. auch *G. W. Hearn,* „Researches on curves of the second order", London 1846, p. 35 f. *Chasles* findet Ann. de math. 18 (1828), p. 300 als Ort der Pole einer Geraden fälschlich einen Kegelschnitt; die Mittelpunktskurve wird eine C_2, wenn einer der drei festen Punkte auf der festen Geraden liegt (*Gergonne,* a. a. O. p. 395 und 399 f.). Kriterien für die Art der Systemkurven hat *H. E. M. O. Zimmermann,* Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884), p. 177 f. und 182 aufgestellt, der überhaupt zahlreiche Eigenschaften des Systems angiebt. *C. Hossfeld,* Arch. Math. Phys. 70 (1882), p. 253—258 betrachtete den Fall, dass zwei der festen Punkte imaginär sind. 438) Vgl. *C. Hossfeld* a. a. O.

439) Bezüglich der Enveloppe ihrer Axen vgl. Nr. **63**.

440) *Gergonne,* Ann. de math. 11 (1821), p. 385—389 hat die Gleichung der Kurve m aufgestellt und gezeigt, wie man ihren Mittelpunkt und sechs ihrer Punkte konstruieren kann. Synthetisch fand *Poncelet,* Ann. de math. 12 (1821), p. 111 f. die Kurve m; vgl. ferner *Hearn,* a. a. O. p. 39.

441) *Steiner-Schröter,* Vorl., p. 346 f. Zum Beweise vgl. auch *C. Intrigila* und *F. Laudiero,* Giorn. di mat. 19 (1881), p. 245—257. Hier wird auch gezeigt, dass wenn P irgend eine Kurve durchläuft, der Mittelpunkt von m eine ähnliche und ähnlich gelegene Kurve beschreibt.

gehenden und mindestens zwei gegebene Geraden berührenden Kegelschnitte auf die Betrachtung ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte zurückgeführt[442]). Eine ausführliche synthetische Untersuchung des Systems für den Fall, dass zwei der festen Geraden imaginär sind, giebt *J. Tesař*; auch spezielle Fälle werden berücksichtigt, so z. B. das System, dessen Kurven einen Brennpunkt (vgl. Nr. 29), eine reelle Tangente und einen reellen Punkt gemeinsam haben[443]). Ein solches System wird z. B. durch alle Parabeln gebildet, die denselben Brennpunkt haben und durch einen gegebenen Punkt gehen; ihre Scheitel liegen nach *Chasles*[444]) auf einer Cardioide (III C 3). Rückt P auf eine der Geraden g_i, z. B. g_1, berühren also die Systemkurven eine Seite g_1 des gemeinsamen Tangentendreiseits in einem bestimmten Punkte, so wird die Kurve m eine Doppelgerade: die Verbindungslinie der Mitte von g_1 mit der Mitte der von der Gegenecke nach P gezogenen Strecke[445]).

73. Das sich selbst duale System $S(2p, 2g)$ besteht, wie schon *Brianchon* erkannte, aus zwei verschiedenen Reihen von Kurven. Sind P_1, P_2 die zwei festen Punkte, g_1, g_2 die zwei festen Tangenten des Systems, so gehen für jede Reihe die Berührungssehnen durch je einen auf P_1P_2 gelegenen Punkt Q_1 bezw. Q_2, und das Punktepaar Q_1, Q_2 liegt harmonisch sowohl zu P_1, P_2 als zu den Schnittpunkten von P_1P_2 mit g_1 und g_2.[446]) *Poncelet* fand als Ort der Mittelpunkte der Systemkurven zwei konzentrische Kegelschnitte, jeder Kurvenreihe gehört ein solcher Kegelschnitt zu, und beide gehen durch den Schnittpunkt von g_1 und g_2, durch die Mitte M_1 von P_1P_2 und die Mitte M_2 der durch g_1, g_2 auf P_1P_2 ausgeschnittenen Strecke. Das gemeinsame Centrum ist der Halbierungspunkt der von M_1 nach dem Schnitt von g_1 mit g_2 gezogenen Strecke. *Poncelet* leitet diese und die *Brianchon*'schen Resultate aus den Eigenschaften des zwei feste Geraden berührenden Systems von Kreisen ab[447]). Sind P_1, P_2, g_1, g_2

442) Ann. de math. 18 (1828), p. 299—301. Es sei noch ein von *Cayley*, Quart. J. 8 (1867), p. 220—222 = Coll. papers 6, p. 51 f. gefundenes Resultat erwähnt: Nach einem Satze von *Ceva*[105]) gehen die Verbindungslinien der Ecken des gemeinsamen Tangentendreiseits mit den auf den Gegenseiten gelegenen Berührungspunkten durch einen und denselben Punkt S; *Cayley* findet als Ort dieser Punkte S eine C_4 mit Spitzen in den Ecken des Dreiseits.

443) Wien. Ber. 84 (1881), p. 194—225.

444) Corresp. math. et phys. 7 (1832), p. 295.

445) *Gergonne*, Ann. de math. 11 (1821), p. 384.

446) „Mémoire sur les lignes du second ordre", Paris 1817, p. 20.

447) *Poncelet* hatte ursprünglich (Ann. de math. 11 (1821), p. 219 f. = Appl. d'anal. 2, p. 516) als Mittelpunktskurve nur *einen* Kegelschnitt gefunden, *Ger-*

reell, so gehört in gewisser Weise jedem Kegelschnitt einer Reihe ein anderer Kegelschnitt derselben Reihe zu, und diesem Paare entspricht ein Paar in der anderen Reihe[448]).

Werden die Tangenten g_1, g_2 durch ein zirkulares Geradenpaar gebildet, so haben alle Systemkurven den Schnittpunkt B des Geradenpaars zum Brennpunkt und gehen überdies durch zwei feste Punkte P_1, P_2. Der Ort der zweiten Brennpunkte besteht aus den zwei konfokalen Kegelschnitten, die P_1, P_2 zu Brennpunkten haben und durch B gehen; die zu B gehörigen Direktricen enthalten den einen oder anderen der Ähnlichkeitspunkte jener Kreise, die durch B gehen und P_1 oder P_2 zum Mittelpunkt haben[449]). Die im System befindliche Ellipse kleinsten Inhaltes bestimmte *R. Hoppe*[450]).

---

gonne, Ann. de math. 11 (1821), p. 390—393 eine C_4, die er für nicht ausgeartet hielt; *Poncelet* fand später (Ann. de math. 12 (1822), p. 233—241 = Appl. d'anal. 2, p. 516—522) die beiden Mittelpunktskegelschnitte. Auch *Chasles* scheint ursprünglich entgangen zu sein, dass das System $S(2p, 2g)$ aus zwei Kurvenreihen besteht, er giebt als Mittelpunktskurve einen Kegelschnitt an (Ann. de math. 18 (1828), p. 300 f.). Eine analytische Ableitung der oben erwähnten Resultate giebt *F. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. 14 (1850), p. 364—381; ferner bewies *Cayley*, Quart. J. 8 (1867), p. 211—219 = Coll. papers 6, p. 43—50 die *Poncelet*'schen Angaben und zeigte, in welcher Weise durch die Lage der Berührungssehne die Lage des Mittelpunktes einer Systemkurve bedingt wird.

448) *Steiner-Schröter*, p. 349 f. Vgl. auch *Th. Krahl*, Progr. Sagan 1886.

449) *Steiner-Geiser*, p. 154—159. Die Aufgabe, einen Kegelschnitt aus einem Brennpunkt und *drei* Kurvenpunkten zu konstruieren, löste *E. Halley* mit Hülfe zweier Hyperbeln (Lond. Trans. 11 (1676), p. 683 ff.); weitere Lösungen gaben *Nicollic*, Par. Hist., année 1746, p. 291—318, Paris 1751; *De la Hire*, Sect. con., p. 191 f. und *Newton*, „Principia math. philos. nat.", Buch 1, prop. 21, probl. 13 = Opera, hrsgg. von *S. Horsley* 2, p. 93 f. = deutsche Übers. von *Wolfers*, Berlin 1872, p. 87 f. Zu *Nicollic*'s Abhandlung vgl. auch *E. Prouhet*, Nouv. ann. 14 (1855), p. 263 f., *Housel* ebenda, p. 425—433 und *E. de Jonquières* ebenda, p. 440—443. Die älteren Autoren erwähnen nicht, dass die Aufgabe allgemein vier Lösungen hat, sondern beschränken sich auf die eine Ellipse, die vorhanden sein kann oder die Hyperbel, für welche die drei gegebenen Punkte auf demselben Zweig liegen. Bei *Steiner-Geiser* findet man a. a. O. näheres über die allgemeine Konstruktion und Art der vier bei gegebenem Brennpunkt durch drei feste Punkte gehenden Kegelschnitte. Für die Gleichung dieser Kurven vgl. *Grunert*, Arch. Math. Phys. 54 (1872), p. 100 ff.; *Salmon-Fiedler*, Kegelschn., p. 746; *E. Lucas*, Nouv. ann. (2) 15 (1876), p. 208. — *J. Keller* (Zürich. Viert. 27 (1882), p. 1—29; 32 (1887), p. 33—79; Zeitsch. Math. Phys. 39 (1893), p. 290—313) setzt die ∞^3 Kegelschnitte mit gemeinsamem Brennpunkt („monofokale" Kegelschnitte) in Beziehung zu den ∞^3 Ebenen des Raumes. Von weiterer Litteratur erwähnen wir noch *W. S. Burnside*, Quart. J. 8 (1865), p. 31—34; *P. Payet*, Nouv. ann. (3) 7 (1888), p. 325—331; *F. Ruth*, Arch. Math. Phys. (2) 8 (1890), p. 1—23.

450) Arch. Math. Phys. 62 (1878), p. 215—218.

74. Das System der einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise erhält man aus $S(2p, 2g)$, wenn man die zwei festen Geraden durch einen festen Kegelschnitt k ersetzt, der nun doppelt berührt werden soll, die zwei festen Punkte durch die imaginären Kreispunkte. Auch hier giebt es zwei Reihen von Systemkurven, und zwar liegen ihre Mittelpunkte auf den beiden Axen von k. Die Reihe von Kreisen, deren Mittelpunkte die *Hauptaxe* von k erfüllen, enthält reelle und imaginäre Kurven, und zwar können die reellen Kreise mit k reelle oder imaginäre doppelte Berührung eingehen; im Falle der reellen Berührung findet diese von innen statt, und die Kreise liegen ganz innerhalb k. Die Kreise, deren Mittelpunkte die *Nebenaxe* von k erfüllen, sind sämtlich reell und berühren k entweder von aussen, oder sie umschliessen k; es hängt von der Art des Kegelschnitts k ab, ob er von allen Kreisen dieser Reihe reell berührt wird, oder ob auch imaginär berührende Kreise in ihr auftreten. *Steiner*, der das System doppelt berührender Kreise näher untersuchte, bemerkte ausserdem, dass die gemeinsame Sekante zweier Kreise derselben Reihe in der Mitte zwischen den zwei Berührungssehnen parallel zu diesen verläuft. Jeder Kreis der oben an zweiter Stelle erwähnten Reihe, bei der die Mittelpunkte auf der Nebenaxe von k liegen, ist auch Ort für die Fusspunkte aller Geraden, die aus den Brennpunkten unter demselben beliebigen Winkel nach allen Tangenten von k gezogen werden[451]).

Später geht *Steiner* von zwei festen Kreisen aus und betrachtet die Gesamtheit der Kegelschnitte, die beide Kreise doppelt berühren. Greift man irgend einen derselben, k, heraus, so haben die aus jedem Punkte von k an beide Kreise gezogenen Tangenten stets irgend eine bestimmte Länge l entweder zur Summe oder zum Unterschied; den Werten 0 bis ∞ von l entspricht die Gesamtheit der Kurven k. Ihre Brennpunkte liegen zu den zwei Ähnlichkeitspunkten der Kreise har-

451) Vgl. auch Nr. **30**, besonders Fussnote 170, ferner für das Vorhergehende *Steiner*, J. f. Math. 37 (1847), p. 174 ff. = Werke 2, p. 404 ff. *W. Fiedler* hat Acta math. 5 (1884), p. 331—408 die *Steiner*schen Sätze mit Hülfe von Methoden der darstellenden Geometrie und seiner Cyklographie („Cyklographie", Leipzig 1882) bewiesen. *R. Niemtschik* hat, auf räumliche Betrachtungen gestützt, Konstruktionen angegeben für Kreise, die einen Kegelschnitt doppelt berühren, sowie für Kegelschnitte, die zwei Kreise doppelt berühren; natürlich kommt noch ein weiteres Bestimmungsstück hinzu (Wien. Ber. 67 (1873), p. 298—310; 68 (1873), p. 377—380 und 505—514). *R. Schüssler* hat Arch. Math. Phys. (3) 2 (1901), p. 1—42 die meisten dieser Aufgaben mit Benutzung der einfachen Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte bewiesen. Vgl. ferner *Gundelfinger*, Vorl., p. 180—183, 333 ff.; *B. Sporer*, Zeitsch. Math. Phys. 41 (1895), p. 210—220.

monisch[452]). Endlich ersetzt er noch die zwei festen Kreise durch Ellipsen und gewinnt Sätze über die Kegelschnitte, die zwei gegebene Ellipsen doppelt berühren[453]).

75. Verschiedene andere Kegelschnittsysteme sind mehr oder weniger eingehend untersucht worden. *Steiner*[454]) z. B. beschäftigte sich mit dem System der einem Dreieck umschriebenen ähnlichen Kegelschnitte, auch *Ed. Weyr* und besonders *F. Kroes* behandelten dasselbe[455]). Ferner hat *Steiner* über die einem Dreieck eingeschriebenen ähnlichen Kegelschnitte Sätze aufgestellt[456]). Er untersuchte überhaupt, in welcher Weise die Art eines einem Dreieck umschriebenen oder eingeschriebenen Kegelschnitts von der Lage des Mittelpunkts M der Kurve abhängt und fand, dass diese in beiden Fällen eine Ellipse ist, wenn M in Bezug auf das dem gegebenen parallel eingeschriebene Dreieck trigonal und im Endlichen liegt, eine Hyperbel, wenn M tetragonale Lage im Endlichen hat[457]). Ebenso ist der

452) J. f. Math. 45 (1852), p. 189—211 = Werke 2, p. 447—468, wo zahlreiche weitere Sätze. Vgl. ausser der in Fussnote 451 erwähnten Litteratur noch *Gundelfinger,* Vorl., p. 401—404.

453) J. f. Math. 45 (1852), p. 212—224 = Werke 2, p. 471—483. Der fundamentale Satz, dass es drei Reihen von Kegelschnitten giebt, die zwei andere k_1 und k_2 doppelt berühren, dass ferner die Berührungssehnen bei jeder Reihe durch je eine Ecke des gemeinsamen Poldreiecks von k_1 und k_2 gehen, findet sich schon bei *Chasles,* Corresp. polyt. 3 (1816), p. 338; vgl. ferner *Poncelet,* Traité Nr. 427—429; *Plücker*, Anal. Entw. 1, p. 259; *Chasles,* Sect. con., p. 337 ff. Analytische Beweise der wichtigsten Sätze giebt *Gundelfinger,* Vorl., p. 396—400. *Niemtschik* hat Wien. Ber. 71 (1875), p. 435—452 Konstruktionen von Kegelschnitten gegeben, die k_1 und k_2 doppelt berühren und durch eine weitere Angabe bestimmt sind.

454) Syst. Entw. Anhang § 39 = Werke 1, p. 446; J. f. Math. 55 (1858), p. 369 = Werke 2, p. 675.

455) *Ed. Weyr,* Wien. Ber. 62 (1870), p. 264—270; *F. Kroes,* Progr. Realg. Münster i. W. 1888 und 1889; vgl. noch *A. Schaeffer,* Diss. inaug. Rostock 1891; *Gundelfinger,* Vorl., p. 306 ff.

456) J. f. Math. 30 (1846), p. 273 = Werke 2, p. 345 f.; J. f. Math. 55 (1858), p. 369 ff. = Werke 2, p. 675 ff. Beweise dieser und ähnlicher Sätze bei *Aeschlimann,* Diss. Zürich 1880; *Kroes,* Diss. Göttingen 1881; *K. Dörholt,* Diss. Münster 1884, § 14—17; *M. Greiner,* Zeitsch. Math. Phys. 29 (1884), p. 238; *G. Loria,* Giorn. di mat. 24 (1885), p. 205—212; *A. Hartmann,* Diss. Zürich 1889, Abschn. 5 und 6; *Gundelfinger,* Vorl., p. 306—313.

457) Roma Giorn. arcad. 99, p. 147 = J. f. Math. 30 (1846), p. 97 = Werke 2, p. 329 f. Zum Beweis vgl. *G. Korneck,* Progr. Oels 1868, p. 4 f.; *E. Hunyady* (für umschriebene Kegelschnitte), J. f. Math. 91 (1881), p. 248—253; *K. Dörholt,* Diss. inaug. Münster 1884, § 2; *A. Hartmann,* Diss. inaug. Zürich 1889, § 4—10; *Gundelfinger,* Vorl., p. 251—254. *G. H. Halphen* untersuchte Nouv. ann. (3) 1 (1882), p. 5—7, wie sich im Falle der Hyperbel die drei Ecken bezw. Seiten des Dreiecks auf die zwei Zweige der Kurve verteilen.

Kegelschnitt bestimmt durch ein Poldreieck und M; hier findet man, dass er imaginär ist, wenn M im Inneren des Dreiecks liegt, dagegen eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem M in einem der übrigen trigonalen oder in einem tetragonalen Felde des Poldreiecks liegt[458]).

Auch bei manchen anderen Kegelschnittsystemen hat *Steiner* Sätze für die Mittelpunktskurve gegeben. So ist z. B. dieser Ort bei Kegelschnitten mit gleichem Produkt der Halbaxen eine C_6 oder eine C_3, je nachdem die Kurven einem Dreieck ABC umschrieben oder eingeschrieben sind[459]). Bezeichnet man diesen zwei Fällen entsprechend das Produkt $ab\pi$ (bei Hyperbeln $ab\pi i$) durch U, bezw. J und sind p_1, p_2, p_3 die Abstände des Kurvenmittelpunktes von den Seiten des Dreiecks ABC, p_1', p_2', p_3' die Abstände von den Seiten des parallel eingeschriebenen Dreiecks $A'B'C'$, r der Radius des Umkreises von ABC, so ist nach *Steiner*[460]):

$$(53) \quad U^2 = \frac{\pi^2 r p_1^{\,2} p_2^{\,2} p_3^{\,2}}{p_1' p_2' p_3'}, \quad J^2 = 4\pi^2 r p_1' p_2' p_3', \quad JU = 2\pi^2 r p_1 p_2 p_3.$$

Sind U', J' dieselben Grössen wie U und J, jedoch mit Bezug auf das Dreieck $A'B'C'$, so findet man leicht $J^2 = 4J'U'$. Sollen der ein- und umschriebene Kegelschnitt konzentrisch sein und gleiches Produkt der Halbaxen haben, so besteht der Ort des gemeinsamen Mittelpunkts aus zwei Kurven 3. Ordnung[461]).

---

458) *H. Schröter,* Zeitsch. Math. Phys. 27 (1881), p. 61 f. (ohne Beweis), bewiesen von *A. Christensen,* Tidsskr. f. Math. (5) 1 (1883), p. 14—17; weitere Beweise bei *Hartmann* [457]) und *Gundelfinger* [457]).

459) Roma Giorn. arcad. 99 = J. f. Math. 30 (1846), p. 99 f. = Werke 2, p. 331 f. *Steiner* erläutert auch den Verlauf der C_6 durch eine Figur.

460) J. f. Math. 55 (1858), p. 364 = Werke 2, p. 670.

461) J. f. Math. 55 (1858), p. 362 ff. = Werke 2, p. 669 ff. Daselbst noch zahlreiche weitere Sätze dieser Art, alle ohne Beweis. Viele wurden später mehrfach bewiesen, manche neue beigefügt, insbesondere wurden auch die Kegelschnitte berücksichtigt, die bei gleichem Axenprodukt dasselbe Dreieck zum Poldreieck haben. Ihre Mittelpunkte liegen nach *L. Painvin,* Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 439 auf einer C_8, dem Ort aller Punkte, für die das Produkt der Abstände von den Seiten des Dreiecks konstant ist, denn das Produkt aus den Quadraten der Halbaxen ist nach *H. Faure,* Nouv. ann. 20 (1861), p. 55 gleich dem Produkt aus dem Durchmesser des Umkreises und den Abständen des Kurvenmittelpunktes von den Seiten des Poldreiecks (zum Beweis vgl. *Painvin* a. a. O. p. 438; *Steiner-Schröter,* p. 180). Schon *Seydewitz* bemerkte Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 50, dass sich die Quadrate der Inhalte zweier Ellipsen verhalten wie die Produkte der Abstände ihrer Mittelpunkte von den Seiten des gemeinsamen Poldreiecks. — Von weiterer Litteratur dieser Art sei erwähnt *Faure,* „Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques", Paris 1867; *G. Korneck,* Progr. Gymn. Oels 1868; *P. Serret,* „Géom. de direct.", chap. 6, § 2; *Dörholt,* Diss. inaug. Münster 1884; *Greiner,* Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884),

Die Kegelschnitte, die bei konstanter Summe $a^2 \pm b^2$ der Quadrate der Halbaxen (+ oder — entsprechend dem Falle von Ellipsen oder Hyperbeln) einem Dreieck eingeschrieben, umschrieben oder konjugiert sind, wurden gleichfalls betrachtet[462]).

---

p. 222—238; *G. Loria,* Giorn. di mat. 24 (1885), p. 210—214; *Hartmann,* Diss. inaug. Zürich 1889; *G. B. Mathews,* London math. soc. Proc. 22 (1890), p. 18—21; *Gundelfinger,* Vorl., p. 295—303; *Steiner-Schröter,* p. 514 f.

462) Bei den *eingeschriebenen* Kegelschnitten ist die Mittelpunktskurve m ein Kreis, der den Höhenschnittpunkt zum Zentrum hat (*J. Mention,* Nouv. ann. 9 (1850), p. 5 ff.; *H. Faure,* „Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques", Paris 1867, p. 40; *P. Serret,* Géom. de direct.", p. 77 f. und 145 f.); ausserdem ist die genannte konstante Summe gleich der Potenz des Mittelpunktes des betreffenden Kegelschnitts in Bezug auf den Kreis, der das Dreieck zum Poldreieck hat (*Faure,* Nouv. ann. 20 (1861), p. 56; *Steiner-Schröter,* p. 514). Für eingeschriebene gleichseitige Hyperbeln ($a^2 - b^2 = 0$) vgl. Nr. **83.** Im Falle der *umschriebenen* Kegelschnitte ist die Kurve m eine C_5 mit Doppelpunkten in den Mitten der Dreiecksseiten (näheres bei *Faure,* Nouv. ann. 19 (1860), p. 405; 20 (1861), p. 56; *G. Loria,* Giorn. di mat. 24 (1885), p. 209; *Steiner-Schröter,* p. 514 f.). Im Falle der zu einem gegebenen Dreieck konjugierten Kegelschnitte ist m ein mit dem Umkreis u des Dreiecks konzentrischer Kreis (*Painvin,* Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 438), und obige konstante Summe ist gleich der Potenz des Mittelpunktes des betreffenden Kegelschnitts in Bezug auf den Kreis u (*Faure,* Nouv. ann. 19 (1860), p. 234; *Steiner-Schröter,* p. 180). Für den Fall gleichseitiger Hyperbeln vgl. Nr. **83.** Auch bei dem Kegelschnittsystem, dessen Kurven drei gegebene Geradenpaare zu Paaren konjugierter Polaren und überdies konstante Summe der Halbaxen haben, ist die Kurve m nach *P. Serret,* „Géom. de direct.", p. 153—157 ein Kreis, speziell für den Fall gleichseitiger Hyperbeln der „cercle associé" der drei Polarenpaare. Die genannte konstante Summe ist allgemein gleich der Potenz des Mittelpunktes des betreffenden Kegelschnitts in Bezug auf diesen beigeordneten Kreis, dessen Konstruktion *Serret* gleichfalls angiebt. Bei Kegelschnitten, die zu einem gegebenen Dreieck konjugiert sind und konstante Summe $\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$ der reziproken Werte der Quadrate der Halbaxen haben, liegen die Mittelpunkte auf einer durch die Ecken des Dreiecks gehenden C_3 (*Painvin,* Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 439; vgl. auch *Gundelfinger,* Vorl., p. 283); die konstante Summe ist gleich dem reziproken Wert der Potenz des Mittelpunktes M des betreffenden Kegelschnitts in Bezug auf den *Feuerbach*'schen Kreis des Dreiecks (*Faure,* Nouv. ann. (2) 11 (1872), p. 447 f.). Zum Beweis dieser und ähnlicher sich auf die konstante Summe $a^2 \pm b^2$ beziehender Sätze vgl. noch *Greiner,* a. a. O. [461]); *Loria,* a. a. O. [461]), p. 205—213; *Hartmann,* a. a. O. [461]); *Gundelfinger,* Vorl., p. 297 f. und 319 f.; *O. Gutsche,* Progr. Breslau 1896; *B. Sporer,* Math.-naturw. Mitt. des math.-naturw. Vereins in Württemberg (2) 1 (1899), p. 35—45. Weitere Litteraturangaben macht *E. Wölffing,* ebenda p. 45 ff. und (2) 2 (1900), p. 17 f. — *P. Serret* hat auch „Géom. de direct.", p. 211—216 quadratische Gleichungen gegeben für die Quadrate der Halbaxen eines Kegelschnitts k mit gegebenem Mittelpunkt M, wenn ein gegebenes Dreieck der Kurve k umschrieben, eingeschrieben oder konjugiert ist; die Koeffizienten

Die Gesamtheit der durch einen festen Punkt gehenden konzentrischen gleichseitigen Hyperbeln betrachtet *P. Volpicelli*, ebenso konzentrische, einander ähnliche Kegelschnitte, die durch einen festen Punkt gehen[463]). *J. Peveling* untersuchte das System von Parabeln, die den im Endlichen gelegenen Brennpunkt gemeinsam haben und eine gegebene Strecke harmonisch teilen[464]). Weiter sei erwähnt das System von Kegelschnitten, die eine gegebene Gerade in demselben Punkte berühren und eine andere feste Gerade zur Direktrix haben[465]), ferner die Parabeln, die bei gegebener Direktrix durch einen festen Punkt gehen[466]). Die einem Dreieck konjugierten Kegelschnitte, deren einer Brennpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, behandelt *Burnside*[467]). Die Kegelschnitte, die eine vorgelegte Kurve oskulieren und durch zwei feste Punkte gehen, hat *A. Kneser* synthetisch behandelt, während *O. Richter* die eine bizirkulare C_4 viermal berührenden Kegelschnitte betrachtete[468]). *G. Kohn* betrachtete Systeme von Kegelschnitten, die eine allgemeine C_4 zur Enveloppe haben[468a]). Wir können auf diese und andere Systeme nicht näher eingehen.

76. Zahl der Kegelschnitte bei gegebenen Bedingungen, Charakteristikentheorie. Bei jedem Kurvensystem kann man fragen, wie viele seiner Kurven gegebene Bedingungen erfüllen. *Chasles* hatte durch Induktion gefunden[468b]), dass bei einem System s_1 von ∞^1 Kegelschnitten die Anzahl der einer weiteren Bedingung genügenden Kurven durch einen Ausdruck von der Form $\alpha\mu + \beta\nu$ gegeben ist. Hierbei bedeutet μ die Zahl der Kurven von s_1, die durch einen

---

der Gleichungen hängen ab von den Seitenlängen des Dreiecks sowie von den Abständen des Punktes M von den Seiten und Ecken des Dreiecks.

463) Paris, C. R. 63 (1866), p. 956—958; Rom Lincei Atti nuovi 19 (1866), p. 282—299.

464) Progr. Realsch. Aachen 1892.

465) *E. N. Barisien,* Nouv. ann. (3) 6 (1887), p. 372—391.

466) *Barisien,* Nouv. ann. (3) 10 (1891), p. 228—231; *G. Leinekugel,* Nouv. ann. (3) 14 (1895), p. 112—116.

467) Quart. J. 8 (1865), p. 34; vgl. auch *Gundelfinger,* Vorl., p. 348 f. Die Konstruktion des zweiten Brennpunktes F_1, wenn F gegeben ist, sowie die Konstruktion der zu F gehörigen Direktrix gab *P. Serret,* „Géom. de direct.", p. 117 f. Bezüglich der einem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitte, deren einer Brennpunkt eine C_n durchläuft, vgl. *C. Doehlemann,* Zeitsch. Math. Phys. 32 (1886), p. 121—127.

468) *Kneser,* Math. Ann. 31 (1887), p. 540—548; *O. Richter,* Zeitsch. Math. Phys. 35 (1890), Supplem., p. 1—111.

468a) J. f. Math. 107 (1890), p. 1—50.

468b) Einen analytischen Beweis (innerhalb gewisser Grenzen) gab *A. Clebsch*, Math. Ann. 6 (1873), p. 1—16.

beliebig gewählten Punkt gehen, ν die Zahl der Kurven, die eine beliebig gewählte Gerade berühren (μ und ν sind die *Charakteristiken des Systems*); α und β sind Zahlen, die nur von der Natur der gegebenen Bedingung abhängen (*Charakteristiken der Bedingung*)[469]. Bezüglich einer näheren Darstellung dieser Charakteristikentheorie, insbesondere auch bezüglich der Ausnahmefälle und weiterer Untersuchungen von *L. Cremona, H. G. Zeuthen, Cayley, Halphen, E. Study* u. A. verweisen wir auf III C 11 und beschränken uns hier auf Angabe einiger für Kegelschnitte wichtigen Resultate. Nach *Chasles* ist der Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines Systems s_1, somit auch der Ort der Mittelpunkte dieser Kurven, eine C_ν, die Polaren eines festen Punktes umhüllen eine C_μ. Der Ort der Brennpunkte ist eine $C_{3\nu}$, die die imaginären Kreispunkte J und $\mathfrak{J}$ zu ν-fachen Punkten hat; besteht das System aus Parabeln, so ist der Ort eine $C_{\frac{\mu}{2}+\nu}$ die in J und $\mathfrak{J}$ $\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)$-fache Punkte hat. Die Fusspunkte der Normalen, die sich von einem festen Punkte P auf die Kurven von s_1 fällen lassen, liegen auf einer $C_{2\mu+\nu}$ mit μ-fachen Punkten in J, $\mathfrak{J}$ und P. Der Ort der Scheitel ist eine $C_{2\mu+3\nu}$; die Asymptoten umhüllen eine $C^{\mu+\nu}$, die Axen eine andere $C^{\mu+\nu}$, die Direktricen eine $C^{2\mu+\nu}$, und diese drei Kurven haben die unendlich ferne Gerade zur ν-fachen Tangente. Das System enthält μ Kurven, die eine gegebene Strecke harmonisch teilen, daher auch μ gleichseitige Hyperbeln.

Allgemein findet *Chasles* das Resultat: Die Zahl der Kegelschnitte, die fünf Bedingungen mit den Charakteristiken α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ genügen, ist:

$$(54)\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 2\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_5 + 4\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4\beta_5 + 4\sum\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\beta_5 + 2\sum\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5.$$

Die Anzahl der in einem System (μ, ν) enthaltenen Punktepaare ist nach *Chasles*[470] $\lambda = 2\mu - \nu$, die Zahl der Geradenpaare $\omega = 2\nu - \mu$, die Gesamtzahl beider also $\mu + \nu$. Für die auf Abzählung bezüglichen Eigenschaften eines Systems s_1, die durch das Binom $\alpha\mu + \beta\nu$ gegeben sind, reichen hiernach zwei Zahlenangaben zur Bestimmung der übrigen aus. Während *Chasles* μ, ν zu Grunde legte, benutzte *Zeuthen*[471]

469) Paris, C. R. 58 (1864), p. 297—308, 425—431; 59 (1864), p. 7—15, 93—97, 209—218.

470) Paris, C. R. 58 (1864), p. 1173 f.; 59 (1864), p. 349.

471) „Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit", Kopenhagen 1865, ins Französische übersetzt Nouv. ann. (2) 5 (1866), p. 241—262, 289—297, 385—398, 433—443, 481—492, 529—540. Vgl. auch Paris, C. R. 62 (1866), p. 177—183.

hauptsächlich λ und ω. Aber meist sind bei Angabe von λ und ω die auftretenden Ausartungen in gewisser Vielfachheit zu zählen, deren Bestimmung oft schwierig ist. *Zeuthen* stellt für diese Bestimmung Regeln auf, und zwar zunächst in den fünf elementaren Fällen $S(4p)$, $S(3p, 1g)$, $S(2p, 2g)$, $S(1p, 3g)$, $S(4g)$, dann auch in zahlreichen anderen Fällen, besonders solchen, in denen Kurven berührt werden.

D. Kegelschnittnetze.

77. Kegelschnittnetz und Hesse'sche Kurve des Netzes. Werden die Gleichungen dreier Kurven 2. Ordnung $f(x, x) = 0$, $g(x, x) = 0$, $h(x, x) = 0$, die nicht einem und demselben Büschel angehören, linear verbunden zu einer Gleichung von der Form:

$$\varkappa f(x, x) + \lambda g(x, x) + \mu h(x, x) = 0, \tag{55}$$

wo $\varkappa$, λ, μ willkürliche Parameter bedeuten, so stellt (55) ein System von ∞^2 Kurven 2. Ordnung dar, das man als *Kegelschnittnetz* (lineares Kegelschnittsystem 2. Stufe)[472]) bezeichnet. Die durch einen beliebig gegebenen Punkt der Ebene gehenden Kurven des Netzes bilden ein Büschel, und es lässt sich leicht einsehen, dass ein Netz unendlich viele Büschel in sich fasst, während irgend zwei dieser Büschel stets einen Kegelschnitt gemeinsam haben. Jedes durch zwei beliebige Netzkurven bestimmte Büschel gehört dem Netze vollständig an.

Bei Kegelschnittbüscheln schneiden sich die in Bezug auf alle Kurven des Büschels genommenen Polaren eines festen Punktes x in einem zweiten festen Punkte (Nr. **49**). Anders bei Netzen. Damit hier die Polaren von x in Bezug auf irgend drei nicht demselben Büschel angehörende Netzkurven sich in einem Punkte y schneiden, muss x auf einer gewissen Kurve liegen, nämlich auf einer C_3 mit der Gleichung:

$$\sum \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_3}\right) = 0; \tag{56}$$

auch y liegt auf ihr, und es sind x und y „konjugierte Pole" in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes. Überhaupt lässt sich diese C_3 auffassen als Ort der irgend drei Netzkurven gemeinschaftlich zugeordneten harmonischen oder konjugierten Polenpaare. Wir wollen die Kurve (56) mit *Cremona*[473]) als *Hesse'sche Kurve* oder *Hessiane* be-

472) Bei englischen Mathematikern net, franz. réseau ponctuel, ital. rete punteggiata.

473) „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane", Bologna Mem. 12 (1861), p. 411; deutsche Übers. von *M. Curtze*, Greifswald 1865, p. 212 f.

zeichen, da wohl *Hesse* zuerst ihre Bedeutung für die Geometrie der Kegelschnittnetze erkannte[474]). Man kann auch umgekehrt nach den drei Kegelschnitten fragen, deren gemeinschaftliche konjugierte Polenpaare in einer gegebenen C_3 [III C 3 u. 4] $F = 0$ liegen. Zur Beantwortung dieser Frage hat man die ternäre kubische Form $\mathfrak{F}$ zu suchen, für die die Determinante der 2. Differentialquotienten die gegebene Funktion F ist; alsdann sind $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die Gleichungen der gesuchten Kegelschnitte. Es giebt drei solche Kegelschnittsysteme, denn einer gegebenen Funktion F entsprechen nach *Hesse* drei Funktionen $\mathfrak{F}$.[475]) Auch die Doppelpunkte der unendlich vielen in dem Netz enthaltenen Geradenpaare liegen auf der Hessiane[476]), und diese Kurve ist daher (Nr. **46**) auch Ort der Ecken aller Poldreiecke, die irgend welchen Kurven des Netzes gemeinsam sind.

Für die konjugierten Pole der Hessiane gilt der Satz von *Hesse*: Sind zwei Punktepaare eines vollständigen Vierseits konjugierte Polenpaare der Hessiane, so sind auch die Punkte des dritten Paares konjugierte Pole, oder in anderer Form: Wenn man irgend einen Punkt R der Hessiane mit zwei konjugierten Polen P und P' verbindet, so schneiden diese Geraden die Hessiane noch in einem weiteren konjugierten Polenpaare Q, Q', und die Geraden QP' und PQ' treffen sich in dem zu R konjugierten Pole R' der Hessiane, das Vierseit ist in der Ausdrucksweise von *Reye* ein *Polvierseit*[477]). Der Beweis gründet sich im wesentlichen auf den *Hesse*'schen Satz: Sind zwei Punktepaare eines vollständigen Vierseits konjugierte Pole eines Kegel-

474) J. f. Math. 28 (1844), p. 105 = Werke, p. 132 f. *Steiner* nennt die C_3 die *Tripelkurve* des Netzes (*Steiner-Schröter*, p. 473); häufig (z. B. bei *Clebsch*, „Vorl. über Geometrie", hrsgg. von *Lindemann*) wird sie auch als *Jacobi*'sche *Kurve* bezeichnet, denn die linke Seite von (56) ist die *Jacobi*'sche oder Funktionaldeterminante [I B 1 b, Nr. **21**] von $f(x, x)$, $g(x, x)$, $h(x, x)$ (*Jacobi* in J. f. Math. 22 (1841), p. 327 f. = Werke 3, p. 403). *J. Rosanes*, Math. Ann. 6 (1872), p. 276 stellt die Hessiane durch eine Determinante 6. Grades dar, in der die x_i durch die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden $u_x = 0$, $v_x = 0$ ersetzt sind.

475) J. f. Math. 28 (1844), p. 106 und 89 = Werke, p. 133 f. und 113; J. f. Math. 36 (1847), p. 143—145 = Werke, p. 156 f. Vgl. auch *Cremona* a. a. O. [473]), p. 422 und Art. 24 = deutsche Übers. von *Curtze*, p. 235 f. und § 24, sowie I B 2, Nr. **11**; endlich die von der C_3 ausgehenden, in den Zusammenhang zwischen der *Hesse*'schen und *Cayley*'schen Kurve besonders eingehenden Arbeiten von *H. S. White*, Amer. Math. soc. Trans. 1 (1900), p. 1, 170, und *P. Gordan*, ib. p. 9, 402.

476) *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), p. 105 f. = Werke, p. 133.

477) *Hesse*, J. f. Math. 36 (1847), p. 146 und 152 = Werke, p. 159 f. und 164; *Reye*, Geom. d. Lage, p. 261 ff.

schnitts, so sind auch die Punkte des 3. Paares konjugierte Pole[478]). Da P, Q, R auf einer Geraden liegen, kann man auch sagen: Die konjugierten Pole P', Q', R' dreier auf einer Geraden gelegenen Punkte P, Q, R der Hessiane bilden ein Dreieck, dessen Seiten $Q'R'$, $R'P'$, $P'Q'$ bezw. durch P, Q, R gehen[479]). Ausserdem folgt leicht, dass die in zwei konjugierten Polen P, P' gezogenen Tangenten der Hessiane sich in einem Punkt dieser Kurve treffen, der zu dem 3. Schnittpunkt der Geraden PP' mit der Kurve konjugiert ist[480]).

78. **Cayley'sche Kurve des Netzes.** Die Verbindungslinien konjugierter Pole umhüllen, wie *Cayley* zeigte, eine Kurve 3. Klasse[481]), die *Cayley'sche Kurve des Netzes*, und da eine solche Verbindungslinie alle Kurven des Netzes harmonisch teilt, entsteht auf ihr eine Involution mit den konjugierten Polen als Doppelpunkten. Die *Cayley*'sche Kurve ist somit auch Enveloppe der Geraden, die irgend drei Kurven des Netzes in Punktepaaren einer Involution treffen[482]). Ferner wird dieselbe Kurve von den im Netze befindlichen Geradenpaaren umhüllt, und umgekehrt gehört jede Tangente der Kurve einem solchen Geradenpaare an[483]). Die Schnittpunkte der *Hesse*'schen und der *Cayley*'schen Kurve sind zugleich Berührungspunkte dieser Kurven, und jede zugehörige Tangente trifft die Hessiane noch in

478) Dissert. Regiomonti = J. f. Math. 20 (1840), p. 301 f. = Werke, p. 41 f. Einen analytischen Beweis des Satzes giebt *Hesse*, J. f. Math. 36 (1847), p. 146 f. = Werke, p. 159 f.; etwas modifiziert *Rosanes*, Zeitsch. Math. Phys. 17 (1872), p. 174—176. Von anderen Beweisen seien erwähnt solche von *Cremona* (a. a. O. p. 391 = p. 161 der deutschen Übers. von *Curtze*) und *Chasles*, Sect. con., p. 97. Im Sinne der Apolaritätstheorie (Nr. 82) ist der Satz fast selbstverständlich, s. *W. Fr. Meyer*[151]), p. 87 f.

479) *Cremona*, a. a. O. p. 413 = p. 216 der deutschen Übers.

480) *Hesse*, J. f. Math. 36 (1847), p. 148 und 151 = Werke, p. 160 f. und 164.

481) J. de math. 9 (1844), p. 290 f. = Coll. papers 1, p. 187. Die Bezeichnung *Cayley*'sche Kurve rührt von *Cremona* her (a. a. O. p. 412 f. = deutsche Übers. p. 215); mitunter (z. B. bei *Clebsch*, „Vorl. über Geometrie", hrsgg. von *Lindemann*) wird sie auch *Hermite*'sche Kurve genannt mit Rücksicht auf *Hermite*'s Darstellung in J. f. Math. 57 (1860), p. 371. Sind $f(x, x)$, $g(x, x)$, $h(x, x)$ die partiellen Differentialquotienten einer ternären kubischen Form $\mathfrak{F}$, so ist die *Cayley*'sche Kurve die „Pippian" von $\mathfrak{F}$ (*Cayley* in Lond. Trans. 147 (1856), p. 415 = Coll. papers 2, p. 381). Vgl. auch Fussnote 534.

482) *Cayley*, Lond. Trans. 147 (1856), p. 429 f. = Coll. papers 2, p. 397—399.

483) *Cayley* a. a. O. p. 423 f. und 425 = Coll. papers 2, p. 391 und 393 f. Mit Hülfe der Involutionen, in denen Netze von den Geraden ihrer Geradenpaare geschnitten werden, hat *Reye* die Netze in vier Arten eingeteilt; allerdings spielt dabei noch das zugehörige „konjugierte Gewebe" (Nr. 84) eine gewisse Rolle (Geom. d. Lage, p. 286—290).

einem Wendepunkt; übrigens sind sechs der Berührungspunkte imaginär[484]).

Die Gleichung der *Cayley*'schen Kurve lässt sich durch eine Determinante 6. Grades darstellen[485]); für die praktische Rechnung oft zweckmässiger dürfte jedoch ein von *Gundelfinger*[486]) angegebenes Verfahren sein: Man bildet die Gleichung $N \equiv \sum \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} u_3\right) = 0$ des Polkegelschnitts einer Geraden $u_x = 0$ in Bezug auf das Büschel $\varkappa f(x, x) + \lambda g(x, x) = 0$ (Nr. **49**) und alsdann bildet man den Ausdruck für die Bedingung, dass $N = 0$ und $h(x, x) = 0$ von der Geraden $u_x = 0$ in zwei harmonischen Punktepaaren getroffen werden (Nr. **48**).

79. System konischer Polaren einer C_3. Jedes Kegelschnittnetz, das keine Doppelgerade enthält, lässt sich als ein System konischer Polaren einer bestimmten C_3 auffassen; es ist dann z. B. $f(x, x) = 0$ die Polare eines bestimmten Poles P in Bezug auf die C_3, und analoges gilt von den Kurven g und h, denen die Pole Q, R zugehören. Bei Einführung neuer Veränderlichen können f, g, h direkt als die partiellen Differentialquotienten der die C_3 darstellenden ternären kubischen Form ausgedrückt werden. *Ch. Hermite* hat dies zuerst gezeigt, später auch *Cremona* (rein geometrisch) und *St. Smith*[487]), ferner mit Hülfe der Invariantentheorie der ternären Formen *Burnside*, *Rosanes*, *Gundelfinger* und *E. Bonsdorff*[488]). Die den Kurven f, g, h

484) *Cremona* a. a. O. p. 420 = deutsche Übers. p. 230 f.; *Steiner-Schröter* p. 490 f.; *H. Picquet*, „Étude géom.", p. 104.

485) Vgl. z. B. *S. Aronhold*, J. f. Math. 55 (1857), p. 189, wo allerdings die Kurve als Kontravariante einer ternären kubischen Form $\mathfrak{F}$ erscheint[481]); vgl. auch *Rosanes*, Math. Ann. 6 (1872), p. 277.

486) J. f. Math. 80 (1874), p. 74, sowie Vorl., p. 225.

487) *Hermite*, J. f. Math. 57 (1860), p. 372—375; *Cremona* a. a. O., Anhang zur deutschen Übers. von *Curtze* p. 274 f.; *Smith*, Lond. math. soc. Proc. 2 (1868), p. 95 f. = Coll. papers 1, Oxford 1894, p. 534.

488) *W. S. Burnside*, Quart. J. 10 (1869), p. 243; *Rosanes*, Math. Ann. 6 (1872), p. 280 f.; *Gundelfinger*, J. f. Math. 80 (1874), p. 73—77; *E. Bonsdorff*, St. Petersb. Bull. 24 (1878), p. 409—419. Vgl. noch *Clebsch-Lindemann*, Vorl. 1, p. 521—524. *Gundelfinger* zeigte auch, dass es im allgemeinen nur eine einzige lineare Substitution giebt, die f, g, h in die partiellen Differentialquotienten einer und derselben ternären kubischen Form C_3 überführt. Offenbar muss für diese C_3 die *Hesse*'sche Determinante der 2. Differentialquotienten gleich der Funktionaldeterminante von f, g, h sein. Wie *Gundelfinger* in den Anmerkungen zu *Hesse*'s Werken, p. 691 mitteilt, findet sich in *Hesse*'s Diarium 1844/45 die Bemerkung, dass es drei ternäre kubische Formen der letztgenannten Art giebt. Eine derselben ergiebt sich nach *Gundelfinger* in rationaler Gestalt $3H(J) + t \cdot J$ und führt auf die typische Darstellung [I B 2, Nr. 7] *Hermite*'s (J ist die Funktionaldeterminante von f, g, h

zugehörigen Pole P, Q, R liegen überdies derart, dass die gerade Polare von P in Bezug auf g zusammenfällt mit der Polare von Q in Bezug auf f, u. s. w. Aber diese letzte Eigenschaft haben P, Q, R nicht allein, sie sind nicht die einzigen Punkte, die in der Redeweise von *Rosanes* ein „Hauptdreieck" bilden, vielmehr giebt es noch zwei andere Hauptdreiecke. *Rosanes* zeigte, dass die Ecken dieser beiden paarweise je einem der drei Kegelschnitte f, g, h konjugiert sind und gab eine Konstruktion ihrer Ecken an. Ferner lassen sich die neun Ecken der drei Hauptdreiecke in bestimmter Weise als Ecken dreier anderer Dreiecke betrachten, die paarweise perspektivisch liegen; und umgekehrt, wenn neun Punkte in dieser Weise gelegen sind, giebt es drei Kegelschnitte, für die jene Punkte die Ecken der Hauptdreiecke bilden[489]).

80. Netze, deren Hessiane oder Cayley'sche Form verschwindet, hat *J. Hahn* untersucht[490]). Mit Hülfe symbolischer Rechnung fand er, dass im Falle identischen Verschwindens der Hessiane zwischen f, g, h eine gewisse Relation 2. Grades besteht und die Netzkurven sämtlich in Geradenpaare zerfallen, die denselben Doppelpunkt haben. Das identische Verschwinden der *Hesse*'schen und der *Cayley*'schen Form hat zur Folge, dass die Kegelschnitte einem Büschel angehören. Verschwindet die *Cayley*'sche Form allein, so haben alle Kurven des Netzes eine Gerade gemeinsam.

E. Kegelschnittgewebe.

81. Kegelschnittgewebe; seine Hesse'sche und Cayley'sche Kurve. Dual zu $\varkappa f(x, x) + \lambda g(x, x) + \mu h(x, x) = 0$ stellt

$$\varkappa \varphi(u, u) + \lambda \chi(u, u) + \mu \psi(u, u) = 0 \tag{57}$$

den willkürlichen Werten der Parameter $\varkappa$, λ, μ entsprechend ein System von ∞^2 Kurven 2. Klasse dar, das man als Kegelschnittgewebe oder Scharschar bezeichnet[491]). Für ein solches System gelten

$H(J)$ die Determinante der 2. Differentialquotienten von J; t ist eine simultane Invariante von f, g, h; diese Darstellung giebt auch *Burnside* a. a. O.). Die zwei anderen kubischen Formen, deren *Hesse*'sche Determinante bis auf einen Zahlenfaktor gleich J ist, sind von der Form $H(J) + aJ$, wo man für a zwei Werte hat, Wurzeln einer von *Gundelfinger* a. a. O. gegebenen quadratischen Gleichung. Vgl. ferner *White*[475]) und *Gordan*[475]).

489) *Rosanes*, Math. Ann. 17 (1880), p. 21—30. Vgl. auch *B. Igel*, Monatsh. Math. Phys. 5 (1894), p. 289 ff.

490) Math. Ann. 15 (1878), p. 111—121.

491) Die Bezeichnung Gewebe rührt von *Schröter*, Math. Ann. 5 (1871), p. 62 und 72, die Bezeichnung Scharschar von *Reye*, „Geom. d. Lage", 2. Aufl. Hannnover 1877, p. 208; bei englischen Mathematikern web, auch tangential net, französ. réseau tangentiel, ital. rete tangenziale.

natürlich die dual entsprechenden zu den vorerwähnten Sätzen des Netzes; wir nennen nur einige derselben. Alle eine gegebene Gerade berührenden Kurven des Gewebes bilden eine Schar; das Gewebe enthält unendlich viele Scharen, darunter im allgemeinen auch eine Schar von Parabeln. Zugleich folgt, dass die drei Parabeln, die den durch φ und χ, χ und ψ, ψ und φ bestimmten Tangentenvierseiten eingeschrieben sind, drei gemeinsame Tangenten haben[492]). Alle Polarenpaare, die irgend drei Kurven des Gewebes gemeinschaftlich harmonisch zugeordnet sind, berühren eine Kurve 3. Klasse C^3, die Hessiane des Gewebes; diese hat auch die Träger der in dem Gewebe enthaltenen Punktepaare zu Tangenten, ebenso die Seiten der Poldreiseite, die irgend welchen Kurven des Gewebes gemeinsam sind. Wenn zwei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks konjugierte Tangenten der Hessiane sind, so gilt dies auch vom dritten Paare, das Viereck ist ein *Polviereck*[493]). Solche Polvierecke lassen sich leicht konstruieren. Es gilt nämlich der Satz, dass die Verbindungslinien der Ecken A, B, C eines Dreiecks mit den Polen der Gegenseiten durch einen und denselben Punkt gehen, der mit A, B, C ein Polviereck bildet. Ebenso wird ein solches Viereck durch ein Poldreieck und einen beliebigen weiteren Punkt der Ebene gebildet[494]).

Die Schnittpunkte konjugierter Polaren erfüllen eine Kurve 3. Ordnung[495]) C_3, die *Cayley*'sche Kurve des Gewebes; sie ist auch Ort aller Punkte, von denen sich an irgend drei Kegelschnitte des Gewebes Tangentenpaare einer Involution legen lassen[496]). Ausserdem wird sie von den im Gewebe enthaltenen Punktepaaren erfüllt[497]).

Weitere wichtige Sätze über Netze und Gewebe folgen in **Nr. 84** und **85**.

---

492) *Chasles,* Sect. con., p. 289.

493) Die Bezeichnung *Polviereck* bei *Reye,* Geom. d. Lage, p. 261; vgl. ferner *Hesse,* J. f. Math. 38 (1847), p. 246 f. = Werke, p. 198—200. Hinsichtlich der Bezeichnung *Jacobi*'sche Kurve des Gewebes statt Hessiane vgl. Fussnote 474.

494) *Reye* a. a. O. Dass obige Verbindungslinien durch denselben Punkt gehen, findet man schon bei *Plücker,* J. f. Math. 5 (1830), p. 11 = Ges. Abh. 1, p. 134; vgl. auch *Hesse,* J. f. Math. 20 (1840), p. 302 = Werke p. 42 f. Zahlreiche weitere Sätze über Polvierecke und Polvierseite bei *Reye* a. a. O. p. 261—293; vgl. auch *Pasch,* Zeitsch. Math. Phys. 27 (1881), p. 122—124; *A.* v. *Brill,* Math. Ann. 20 (1882), p. 531—534, sowie *W. Fr. Meyer* [507]).

495) *Hesse,* J. f. Math. 38 (1847), p. 252 = Werke p. 205.

496) *Cayley,* J. de math. 10 (1845), p. 104—106 = Coll. papers 1, p. 191—193. Die Kurve wird auch häufig als *Hermite*'sche Kurve des Gewebes bezeichnet; vgl. hierzu Fussnote 481.

497) Die durch paarweise Kombination von φ, χ, ψ bestimmten drei Kurvenscharen enthalten nun insgesamt neun Punktepaare, also 18 Punkte, die auf

F. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme in konjugierter Lage.

82. Kegelschnitte in konjugierter Lage. *Hesse* hat nach der geometrischen Bedeutung einer linearen Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten a_{ik} von $f(x, x) = 0$ gefragt und kam auf analytischem Wege zu dem Resultat, dass im Falle einer solchen Bedingung die Kurve $f(x, x) = 0$ einem Poldreieck eines anderen Kegelschnitts $\Phi(x, x) = 0$ umschrieben ist, der sich vermöge der Bedingungsgleichung bestimmen lässt. Ist diese:

$$(58)\quad [a, \alpha] \equiv a_{11}\alpha_{11} + 2a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + 2a_{13}\alpha_{13} + 2a_{23}\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33} = 0,$$

so wird:

$$(59)\quad \Phi(x, x) \equiv \mathsf{A}_{11}x_1^2 + 2\mathsf{A}_{12}x_1x_2 + \mathsf{A}_{22}x_2^2 + 2\mathsf{A}_{13}x_1x_3 + 2\mathsf{A}_{23}x_2x_3 + \mathsf{A}_{33}x_3^2,$$

unter A_{ik} die Unterdeterminante von α_{ik} in der Determinante der α_{ik} verstanden, oder in Linienkoordinaten ist:

$$(60)\quad \varphi(u, u) \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0$$

die Gleichung des anderen Kegelschnitts. Auch ist (59) die reziproke Polare von $\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + 2\alpha_{23}x_2x_3 + \alpha_{33}x_3^2 = 0$ in Bezug auf $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.[498]) Die *Hesse*'sche Deutung der linearen Bedingung (58) bildet die Grundlage für Untersuchungen, die von einander unabhängig *Smith*[499]) und *Rosanes*[500]) anstellten, der erste zum grossen Teil mit rein geometrischen Methoden, der letztgenannte mit Hülfe der Symbolik der ternären Formen. Eine ausführliche Darstellung, die auch viele von *Smith* und *Rosanes* nicht behandelte spezielle Fälle berücksichtigt, wurde von *Picquet* gegeben[501]). *Smith* nennt den Kegelschnitt f *harmonisch umgeschrieben* dem Kegelschnitt Φ, *Rosanes* nennt beide Kurven *konjugiert*, *Reye* sagt die Kurve 2. Ordnung f *stützt* oder *trägt* die Kurve 2. Klasse φ, und umgekehrt *stützt sich* φ auf f oder *ruht* auf f; auch nennt *Reye* beide Kurven *apolar*[502]). (Vgl. auch I B 2, Nr. 24.)

einer C_3 liegen. Haben die drei Kegelschnitte eine gemeinsame Tangente (sind sie z. B. Parabeln), so liegen neun Punkte auf dieser Tangente, die neun übrigen auf einer C_2 (*Picquet*, Étude géom., p. 51).

498) J. f. Math. 45 (1852), p. 83—87 = Werke p. 298—303, in französ. Bearbeitung Nouv. ann. 14 (1855), p. 125—127.

499) Lond. math. soc. Proc. 2 (1868), p. 85—100 = Coll. papers 1, p. 524—540.

500) Math. Ann. 6 (1872), p. 264—312.

501) „Étude géom.", Paris 1872. Vgl. auch *Gundelfinger*, Vorl., p. 228—240 und für spezielle Fälle p. 394—415.

502) *Smith* a. a. O. p. 85 bezw. 524; *Rosanes* a. a. O. p. 268, für binäre Formen J. f. Math. 76 (1873), p. 313; *Reye*, Geom. d. Lage, p. 266. In der

Mit Rücksicht darauf, dass die Ecken zweier Poldreiecke eines gegebenen Kegelschnitts nach *Steiner* wieder auf einem Kegelschnitt liegen[503]), geht f überhaupt durch die Ecken unendlich vieler Poldreiecke von Φ, falls f durch die Ecken von *einem* Poldreieck geht[498]), und die Seiten aller dieser Poldreiecke berühren denjenigen Kegelschnitt, dessen Tangenten die Kurven f und Φ in harmonischen Punktepaaren treffen[499]). Wenn ferner f der Kurve φ harmonisch umschrieben ist und durch drei Ecken eines Polvierecks von φ hindurchgeht, liegt auch die vierte Ecke auf f.[504]) Andrerseits ist im Falle $[a, \alpha] = 0$ die Kurve φ unendlich vielen Poldreiecken von f eingeschrieben, φ ist der Kurve f *harmonisch eingeschrieben*[505]). Auch die Umkehrung gilt: Wenn f und φ in einer der erwähnten Beziehungen zu einander stehen, ist $[a, \alpha] = 0$.[506]) Der Ausdruck $[a, \alpha]$ ist übrigens eine Invariante von f und φ. Die schon in Nr. **46** erwähnte Gleichung 3. Grades $C(\lambda) = 0$ für die Parameterwerte der in einem Büschel $\lambda g - f = 0$ befindlichen Geradenpaare ist nämlich von der Form

---

speziellen Anwendung des Apolaritätsbegriffes auf Kegelschnitte ist freilich die allgemeine Definition dieses Begriffes nicht zu erkennen, vielmehr hatte *Reye* allgemeiner gezeigt [III C 2], dass in Bezug auf eine Fläche n^{ter} Klasse F^n nicht nur den einzelnen Ebenen des Raumes bestimmte Polaren entsprechen, sondern für $k < n$ auch den Flächen k^{ter} Ordnung F_k; ausgenommen sind die zu F^n apolaren F_k, als deren Polaren jede Fläche $(n-k)^{\text{ter}}$ Klasse angesehen werden kann. Vgl. J. f. Math. 82 (1876), p. 2. Den Begriff der Apolarität höherer Flächen definierte *Reye,* J. f. Math. 78 (1873), p. 97. Haben beide Flächen gleichen Grad (Klasse der einen = Ordnung der anderen), so ist die Apolaritätsbedingung von ähnlicher Gestalt wie (58); vgl. J. f. Math. 79 (1874), p. 165 f.

503) Syst. Entw. § 60, Nr. 46 = Werke 1, p. 448. Bewiesen wurde obiger Satz zuerst synthetisch von *Chasles,* J. de math. 3 (1838), p. 396—398, analytisch von *Hesse,* J. f. Math. 20 (1840), p. 292 = Werke p. 31. Es sei hier noch ein ähnlicher Satz erwähnt, den *F. Mertens,* Wien. Ber. 94 (1886), p. 794 ff. analytisch beweist: Ein umschriebenes Dreieck und ein Poldreieck eines Kegelschnitts bilden resp. ein Poldreieck und ein eingeschriebenes Dreieck für einen anderen Kegelschnitt, und umgekehrt. 504) *Reye,* Geom. d. Lage, p. 266.

505) *Hesse,* „Vorl. über analyt. Geom. des Raumes", 1. Aufl. 1861, p. 175 und 178.

506) *Salmon,* Quart. J. 5 (1862), p. 362 f. Rein analytisch wurden die vorstehenden und einige andere Sätze auch von *Gundelfinger* bewiesen im 3. Suppl. zur 3. Aufl. von *Hesse*'s Vorl. über Raumgeometrie, p. 486—497, sowie in *Gundelfinger,* Vorl., p. 161—165; hier werden auch die Fälle berücksichtigt, wo die Kurve f allein, oder f und Φ ausarten. — Unter den Kegelschnitten eines Büschels giebt es offenbar einen, w, der irgend einem Kegelschnitt s harmonisch umschrieben ist, und umgekehrt giebt es zwei Büschelkurven, die der Kurve w eingeschriebene Poldreiecke haben (näheres bei *G. Bauer,* J. f. Math. 68 (1867), p. 293—296).

(61) $$C(\lambda) \equiv \lambda^3 B - 3\lambda^2 \Theta + 3\lambda \mathsf{H} - A = 0,$$

wo $3\Theta = [a, B]$, $3\mathsf{H} = [b, A]$ Invarianten von gleicher Gestalt wie $[a, \alpha]$ sind.

W. F. Meyer setzte den Kegelschnitt φ in der „Normalform" („Normkurve" der Ebene) $u_0 u_2 - u_1^2 = 0$ voraus (vgl. S. 125) und drückte im Falle $\Theta = 0$ die Bedingung für ein in Bezug auf $f(x, x) = 0$ konjugiertes Punktepaar P, Q durch eine Gleichung aus, die die „Argumentenpaare" der von P und Q an $\varphi(u, u) = 0$ gehenden Tangentenpaare in einer *für die vier Argumente symmetrischen* Gestalt enthält und überdies die Deutung zulässt, dass sie die ∞^3-Schar von Polvierseiten des zu $\varphi(u, u) = 0$ apolaren Kegelschnitts $f(x, x) = 0$ darstellt. Vorerwähnte Gleichung bildet bei *Meyer* die Grundlage zur Ableitung mehrerer, teils neuer, teils schon bekannter Sätze, z. B.: Irgend vier einem Kegelschnitt φ umschriebene Vierseite bestimmen einen zu φ apolaren Kegelschnitt f, der aus φ das zu jenen vier Quadrupeln apolare ausschneidet; die Vierseite sind Polvierseite von f. *W. F. Meyer* zeigte auch, wie sich die Bedingung der Apolarität zweier binärer biquadratischer Formen unmittelbar als ternäre Apolaritätsbedingung zweier Kegelschnitte auffassen lässt, und er gewinnt hieraus leicht den Satz: Sind auf einem Kegelschnitt k zwei Punktquadrupel gegeben, so geht durch das eine ein einziger Kegelschnitt f, der k stützt, und die Tangenten des anderen Quadrupels berühren zugleich einen einzigen Kegelschnitt Φ, der auf k ruht. Sind die Quadrupel apolar, so auch die Kurven f und Φ, und umgekehrt. — Von den Polvierseiten der Kurve f gelangt man zu den Poldreiseiten *Hesse*'s, indem man (Nr. 81) eine Seite der erstgenannten unbestimmt werden lässt. Die dem Kegelschnitt φ umschriebenen Poldreiseite von f sind dann auf φ dargestellt durch die zur Gruppe der ersten Polaren des Schnittpunktquadrupels von f und φ apolare Gruppe. Durch die auf φ liegenden Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von f und φ geht ferner jener Kegelschnitt H, dem alle φ umschriebenen Poldreiseite von f eingeschrieben sind; jene Berührungspunkte auf φ sind auch die einzigen Punkte dieser Kurve, deren Polaren in Bezug auf f wieder Tangenten von φ sind; dieselben werden von H berührt in ihren Schnittpunkten mit den gemeinsamen Tangenten von f und φ.[507]) Soll ferner f der Kurve φ zugleich har-

507) Für das Vorhergehende verweisen wir auf *W. F. Meyer*, „Apolarität und rationale Kurven", Tübingen 1883, p. 84—110; Math. Ann. 21 (1882), p. 536—540; Württemb. Korresp.-Blatt 1884, Heft 7, 8; deutsche Math.-Ver. 1 (1892), p. 261 f. Für die Interpretation binärer Formen auf einem Kegelschnitt ist ferner zu erwähnen eine Arbeit von *O. Schlesinger*, Math. Ann. 22 (1883), p. 520; vgl. auch *F. Lindemann*, Par. soc. math. Bull. 5 (1877), p. 119.

monisch um- und eingeschrieben sein, so muss es unendlich viele Poldreiseite von f geben, die φ umschrieben sind, und zugleich unendlich viele Dreiseite, die der Kurve f eingeschrieben, der Kurve φ umschrieben sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierzu wird, dass das Quadrupel der Schnittpunkte von f und φ äquianharmonisch ist (Nr. **53**)[508].

83. Weitere Untersuchungen über konjugierte Kegelschnitte. *Smith* benutzt die von ihm gegebenen Sätze auch zur Konstruktion des Kegelschnitts, der durch 3, 2, 1 oder keinen gegebenen Punkt geht und bezw. 2, 3, 4 oder 5 gegebenen Kurven harmonisch umschrieben ist. Gelegentlich der letzten dieser Konstruktionen[509]) beweist er synthetisch die analytisch evidente Thatsache, dass wenn zwei Kurven f und g einem Kegelschnitt s harmonisch umschrieben sind, dies auch von jeder Kurve des Büschels $\lambda g - f = 0$ gilt.

Man kann fragen, welche Bedingung die einem Kegelschnitt k harmonisch umschriebenen Kreise erfüllen oder, was sich gleichzeitig hiermit erledigt, die einem Kreis k_0 harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitte. *Faure* hat in dieser Hinsicht den Satz ausgesprochen, dass die vom Mittelpunkt eines solchen Kegelschnitts k an den Kreis gezogenen Tangenten gleich dem Radius des Direktorkreises von k sein müssen[510]). Der Direktorkreis schneidet somit alle Kreise, die Poldreiecken von k umschrieben sind, rechtwinklig. Sind die Kurven k gleichseitige Hyperbeln, so ist der gegebene Kreis k_0 der Ort ihrer Mittelpunkte; es folgt also, dass die Mittelpunkte aller einem gegebenen Dreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln auf demjenigen Kreis liegen, welcher das Dreieck zum Poldreieck hat[511]).

508) *Gundelfinger,* Zeitschr. Math. Phys. 20 (1874), p. 156; *W. F. Meyer,* „Apolarität", p. 150 f. Auch *Ferrers* hat sich schon Quart. J. 7 (1866), p. 20 mit der Bedeutung von $\Theta = \mathsf{H} = 0$ beschäftigt. Vgl. noch Fussnote 553.

509) Diese Konstruktion schliesst als besonderen Fall die Lösung einer schon von *Hesse,* J. f. Math. 20 (1840), p. 293 = Werke p. 32 gestellten und von *E. de Jonquières,* Nouv. ann. 14 (1855), p. 435—440 gelösten Aufgabe in sich: den Kegelschnitt zu konstruieren, der fünf gegebene Strecken harmonisch schneidet; für die dual entsprechende Aufgabe vgl. auch *Picquet,* „Étude géom.", p. 108 f.

510) Nouv. ann. 19 (1860), p. 234. Analytische Beweise des Satzes gaben *L. Painvin,* Nouv. ann. 19 (1860), p. 294; *Salmon,* ebenda p. 347 f.; synthetische Beweise bei *Steiner-Schröter,* p. 178 f. Vgl. ferner *E. de Jonquières,* Nouv. ann. 20 (1861), p. 25 f.; *P. Serret,* ebenda p. 77—80, sowie *J. Taylor,* Quart. J. 10 (1870), p. 129 f. Eine Verallgemeinerung des *Faure*'schen Satzes giebt *A. Cazamian,* Nouv. ann. (3) 13 (1894), p. 229; vgl. auch ebenda, p. 324—348, wo zahlreiche Folgerungen aus dem *Faure*'schen Satze.

511) In ganz anderem Zusammenhange findet sich der Satz bei *Brianchon* und *Poncelet,* Ann. de math. 11 (1821), p. 210 = *Poncelet,* Appl. d'anal. 2, p. 508 f.

Ferner erkennt man, dass die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die ein gegebenes Dreieck zum Poldreieck haben, auf dem Umkreis des Dreiecks liegen[512]). Sind die Kegelschnitte k Parabeln, so müssen deren Direktricen durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehen, und die Mittelpunkte aller einer Parabel harmonisch umschriebenen Kreise müssen auf der Direktrix der Parabel liegen[513]).

Sollen Kreise einem gegebenen Kegelschnitt k harmonisch eingeschrieben sein, so müssen bei gegebenem Radius ihre Mittelpunkte auf einem gewissen mit k koaxialen und ähnlichen Kegelschnitt k_1 liegen, der insbesondere mit k zusammenfällt, falls k eine gleichseitige Hyperbel ist. Soll ein bestimmter Punkt M Mittelpunkt eines einem Kegelschnitt f und eines einem Kegelschnitt g harmonisch eingeschriebenen Kreises sein, so haben diese zwei Kreise im allgemeinen verschiedene Radien; man kann daher fragen, wie M gelegen sein muss, wenn beide Kreise zusammenfallen sollen. Hat man einen solchen Punkt M gefunden, so ist der zugehörige Kreis allen Kurven des durch f und g bestimmten Büschels harmonisch eingeschrieben, somit auch der im Büschel befindlichen gleichseitigen Hyperbel, es muss daher M auf dieser Kurve liegen, sie ist der gesuchte Ort[514]).

84. Kegelschnittsysteme in konjugierter Lage. *Smith* betrachtet auch Systeme von Kegelschnitten und die zugehörigen „konjugierten Systeme"; sehr ausführlich behandeln die Beziehungen beider *Picquet*[501]), *Rosanes*[500]) und *Reye*[515]).

Ist ein „Kegelschnittsystem k^{ter} Stufe" gegeben durch eine Gleichung

$$(62)\quad \lambda_1 f_1(x,x) + \lambda_2 f_2(x,x) + \cdots + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x,x) = 0, \quad k = 1,2,3,4,$$

wo die $f(x,x) = 0$ von einander unabhängige Kegelschnitte darstellen, und sind die Kurven $f(x,x) = 0$ einem gegebenen Kegelschnitt har-

---

Vgl. ferner *L. J. Magnus,* „Sammlung von Aufg. und Lehrs. aus der anal. Geom.", Berlin 1833, p. 185—188; *F. Seydewitz,* Arch. Math. Phys. 3 (1843), p. 228 f. *Steiner* bemerkt J. f. Math. 55 (1858), p. 371 = Werke 2, p. 677, dass er den Satz schon vor 12 Jahren gefunden und hält ihn für neu. Im Zusammenhang mit dem *Faure*'schen Satze beweist ihn auch *J. Taylor*[510]).

512) *Brianchon* und *Poncelet* a. a. O. Alle diese Hyperbeln sind (Nr. **50**) einem Dreieck ABC umschrieben und gehen auch durch dessen Höhenschnittpunkt, das Poldreieck wird durch die Höhenfusspunkte gebildet; da der Umkreis des Poldreiecks somit der *Feuerbach*'sche Kreis von ABC ist, folgt sofort, dass die Mittelpunkte der einem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln auf dem *Feuerbach*'schen Kreis des Dreiecks liegen (Nr. **50**).

513) *Salmon,* Nouv. ann. 19 (1860), p. 348.

514) *Picquet,* a. a. O. p. 72—74; *Salmon-Fiedler,* Kegelschn., p. 642.

515) Geom. d. Lage, p. 264—293. Vgl. auch *Darboux,* Bull. scienc. math. astr. 1 (1870), p. 348 ff.

monisch umschrieben, so gilt dies von allen Kurven des Systems. Alle Kegelschnitte eines Systems k^{ter} Stufe sind daher sämtlichen Kurven eines „konjugierten“ Systems $(4-k)^{\text{ter}}$ Stufe:

$$(63) \qquad \mu_1\varphi_1(u,u) + \mu_2\varphi_2(u,u) + \cdots + \mu_{5-k}\varphi_{5-k}(u,u) = 0$$

harmonisch umschrieben[516]). Umgekehrt bilden alle Kegelschnitte, die den Kurven eines Systems $(4-k)^{\text{ter}}$ Stufe harmonisch umschrieben sind, ein System k^{ter} Stufe. Denkt man sich aus den Matrices der Koeffizienten zweier solchen Systeme die Determinanten gebildet, so sind die der einen Matrix proportional den „komplementären“ Determinanten der anderen[517]).

Im Falle $k = 4$ reduziert sich das zu (62) konjugierte System auf einen einzigen Kegelschnitt, dessen Tangenten durch die in dem System 4. Stufe enthaltenen Doppelgeraden gebildet werden. Sind andrerseits die $f_i(x,x) = 0$ fünf Doppelgeraden $U_i^2 = 0$, die eine Kurve $\varphi(u,u) = 0$ berühren, so steht der Ausdruck für irgend eine sechste Tangente $U_6 = 0$ dieser Kurve mit den U_i in der Beziehung, dass sich immer sechs Faktoren λ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ bestimmen lassen, für die[518]):

$$(64) \qquad \lambda_1 U_1^{\,2} + \lambda_2 U_2^{\,2} + \lambda_3 U_3^{\,2} + \lambda_4 U_4^{\,2} + \lambda_5 U_5^{\,2} + \lambda_6 U_6^{\,2} \equiv 0.$$

Diese Identität liefert auch die C_2, die irgend zwei einem Kegelschnitte umschriebene Dreiecke zu Poldreiecken hat[519]). Die in dem System $\sum_1^5 \lambda_i U_i^2 = 0$ befindlichen Kreise bilden ein Netz; der Potenzmittelpunkt des Netzes (Nr. 85) ist Mittelpunkt des dem Fünfseit der Ge-

516) *Smith* nennt dieses System the system contravariant to the given system. Bei *Clebsch-Lindemann,* Vorl., p. 385 findet sich die Redeweise, dass das System der φ mit dem der f „in vereinigter Lage“ befindlich sei.

517) *Smith,* Lond. Trans. 151 (1861), p. 301 = Coll. papers 1, p. 376 f. Vgl. auch *A. v. Brill,* Math. Ann. 4 (1871), p. 530; *M. Pasch,* J. f. Math. 75 (1872), p. 108; *W. Fr. Meyer,* Apolarität[507]), § 1; *P. Gordan,* „Vorl. üb. Invariantentheorie“, hrsgg. von *G. Kerschensteiner* 1 (1885), p. 95—99 und 110—112, sowie I A 2, Nr. 34.

518) Vgl. *Hesse,* 4 Vorl., p. 19 f. und 31 = Zeitschr. Math. Phys. 11, p. 387 f. und 399. Dort ist allerdings der Gedankengang ganz anders. Ein weiterer Beweis bei *P. Serret,* Géom. de direct., p. 74 f. und 130—137; *Gundelfinger,* Vorl., p. 234. Für das System $k = 4$ vgl. auch eine Bemerkung von *Rosanes* für den Fall, dass die konjugierte Kurve $\varphi = 0$ ein Punktepaar ist (Math. Ann. 6 (1872), p. 282 f.); ferner allgemein *Picquet,* a. a. O.[501]) p. 35—38, 129—133 und dual p. 56 und 89—92.

519) Vgl. *P. Serret,* a. a. O. p. 209. Die näheren Ausdrücke für die Koeffizienten der Identität giebt *E. Study,* Leipz. Ber. 47 (1895), p. 544.

raden $U_i = 0$ eingeschriebenen Kegelschnitts k, und die in dem Netz befindlichen Grenzpunkte (Nr. **51**) liegen auf dem Direktorkreis von k. Zu den Kreisen des Netzes gehören natürlich auch die konjugierten Kreise der zehn Dreiseite, die sich aus den fünf Geraden bilden lassen[520]). Dem Falle $k = 4$ entspricht dual der Fall $k = 0$; hier ist ein Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ gegeben, das konjugierte System ist 4. Stufe.

Im Falle $k = 3$ besteht das konjugierte System aus einer Kegelschnittschar, deren vier Grundtangenten durch die Doppelgeraden des Systems 3. Stufe S_3 gebildet werden; die eigentlichen Geradenpaare von S_3 repräsentieren die Gesamtheit aller der Schar konjugierten Geradenpaare. Auch ist leicht einzusehen, dass für $f_i(x, x) = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ als Gleichungen von vier Kegelschnitten man im allgemeinen auf vier verschiedene Arten Faktoren λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 so bestimmen kann, dass $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4$ das Quadrat eines linearen Ausdrucks wird[521]). Umgekehrt lässt sich jede Kurve von S_3 durch die vier Doppelgeraden linear darstellen[522]). Die drei in der Schar befindlichen Punktepaare sind dem System S_3 harmonisch eingeschrieben, sie sind Paare von Doppelpunkten je einer Involution, die durch die Kurven von S_3 auf den Trägern der Punktepaare ausgeschnitten wird[523]). Die Direktorkreise der Schar bilden (Nr. **60**) ein Büschel B_1; das Kreisbüschel B_2, das die Kurven von B_1 rechtwinklig schneidet, enthält alle den Kegelschnitten der Schar harmonisch umschriebenen Kreise. Diese gehören somit dem System S_3 an, die in S_3 befindlichen Kreise bilden also ein Büschel[524]). Die unendlich vielen Hessianen, die den in S_3 enthaltenen ∞^1 Netzen zu-

---

520) *P. Serret,* a. a. O. p. 116 f.; die Grenzpunkte nennt er points cycliques du pentagone.

521) *Salmon-Fiedler,* Kegelschn., p. 634 und 685; *Gundelfinger,* Vorl., p. 237.

522) *Serret,* a. a. O. p. 48 f. und 260 f.; *Rosanes,* Math. Ann. 6 (1872), p. 307—310; J. f. Math. 73 (1870), p. 109 f.

523) *Cremona* hat Educ. Times 4 (1866), p. 109 f. den von *Clifford* zum Beweis gestellten Satz bewiesen, dass irgend vier Kegelschnitte ein self-conjugate quadrilateral (Polvierseit) besitzen. — Schon in *Clebsch*'s Abhandlung über die ebene Abbildung der *Steiner*'schen Fläche 4. Ordnung [III C 6] (J. f. Math. 67 (1866), p. 1 ff.) tritt ein System $S_3 \equiv \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$ auf, gebildet durch alle Kegelschnitte, die die Träger gewisser dreier Punktepaare harmonisch teilen. Diese Punktepaare sind die in der zugehörigen Kegelschnittschar $\Sigma_i \equiv \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 = 0$ befindlichen ausgearteten Kurven, also die Durchschnitte von vier Geraden, die die Abbildungen der vier Kegelschnitte darstellen, längs deren die Fläche von einer Ebene berührt wird. Die Nebenseiten des durch die Punktepaare bestimmten vollständigen Vierseits entsprechen den drei Doppelgeraden der *Steiner*'schen Fläche.

524) *Picquet,* a. a. O. p. 82.

gehören, gehen durch die erwähnten drei Punktepaare hindurch[525]), denn diese sind allen Netzen von S_3 konjugiert. Alle *Cayley*'schen Kurven dieser Netze werden von den Trägern der drei Punktepaare berührt[526]). —

Wenn die Schar konfokal ist, besteht das System S_3 aus allen gleichseitigen Hyperbeln, denen das reelle Brennpunktepaar der Schar konjugiert ist[527]). Auch alle Kreise der Ebene bilden ein System S_3; ist $k(x, x) = 0$ die Gleichung des einem gegebenen Dreieck, z. B. dem Koordinatendreieck Δ umschriebenen Kreises und sind $g_i(x, x) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die durch die Ecken von Δ gehenden zirkularen Geradenpaare, so ist jeder Kreis der Ebene darstellbar durch $k + \lambda g_1 + \mu g_2 + \nu g_3 = 0$. Man kann dies folgendermassen geometrisch deuten: Der Ort aller Punkte P, für die der Inhalt und die Quadrate der Seiten des Fusspunktdreiecks einer bestimmten linearen Gleichung genügen, ist ein Kreis; dabei bedeutet Fusspunktdreieck dasjenige, welches durch die Fusspunkte der von P auf die Seiten des Koordinatendreiecks gefällten Lote gebildet wird[528]). —

Gehen die Kurven $f_i(x, x) = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ durch einen und denselben Punkt, so besteht die konjugierte Schar aus sich doppelt berührenden Kegelschnitten[529]).

Dem Falle $k = 3$ entspricht dual $k = 1$; hier ist ein Büschel gegeben, das konjugierte System Σ_3 ist dritter Stufe. Jeder Punkt der im Büschel befindlichen gleichseitigen Hyperbel ist (Nr. 83) Mittelpunkt eines allen Büschelkurven harmonisch eingeschriebenen Kreises, und diese Kreise gehören somit dem System Σ_3 an; umgekehrt erfüllen die Mittelpunkte aller Kreise von Σ_3 die konjugierte gleichseitige Hyperbel[530]).

Im Falle $k = 2$ besteht das zu dem gegebenen Netz S_2 konjugierte System Σ_2 aus einem Kegelschnittgewebe, und zwischen S_2 und Σ_2 finden vielfache Beziehungen statt. So ist z. B. die *Cayley*'sche

525) Dieser Satz rührt von *H. Siebeck,* Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 65—67 her. Das durch die Träger der drei Punktepaare gebildete Dreieck nennt er Chordaldreieck der vier Kegelschnitte. Die Schnittpunkte irgend zweier dieser Kurven liegen mit den Ecken des Dreiecks jedesmal auf einem neuen Kegelschnitt (ebenda, p. 67 f.).

526) *Rosanes,* Math. Ann. 6 (1872), p. 298. — Für eine nähere Betrachtung der Systeme S_3 sei noch verwiesen auf *Picquet,* a. a. O. p. 31—35, 126—129 und dual p. 53—55, 93—95.

527) *Picquet,* a. a. O. p. 128.

528) *P. H. Schoute,* Wien. Ber. 94 (1886), p. 786 f.

529) *Rosanes,* a. a. O. p. 272.

530) *Picquet,* a. a. O. p. 74.

Kurve von S_2 zugleich die Hessiane des Gewebes Σ_2, und die *Cayley*'sche Kurve von Σ_2 ist identisch mit der Hessiane von S_2.[531]) In einem Netz S_2 ist im allgemeinen nur *ein* Kreis enthalten; da die Punktepaare des zugehörigen Gewebes zu ihm konjugiert liegen, schneidet er diejenigen Kreise rechtwinklig, welche die Verbindungsstrecken der konjugierten Punktepaare zu Durchmessern haben, und diese Kreise haben somit denselben Potenzmittelpunkt[532]). Die in S_2 befindlichen gleichseitigen Hyperbeln bilden ein Büschel, denn sie sind alle zu dem imaginären Kreispunktepaar konjugiert. Da die Grundpunkte dieses Büschels die Mittelpunkte von vier den Kurven des Netzes harmonisch eingeschriebenen Kreisen darstellen, giebt es im konjugierten Gewebe Σ_2 vier Kreise, deren Mittelpunkte die eben erwähnte Lage haben[533]).

Der Fall, dass das Netz S_2 durch die in Bezug auf eine Kurve 3. Ordnung $\mathfrak{F} = 0$ genommenen konischen Polaren aller Punkte y der Ebene dargestellt wird, also die Gleichung hat:

$$y_1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_3} = 0, \tag{65}$$

wurde schon in Nr. 79 betrachtet. Hier sei noch Folgendes erwähnt. Genau in analoger Beziehung wie $\mathfrak{F}$ zu den Kurven von S_2 steht, befindet sich eine gewisse Kontravariante zu den Kurven von Σ_2, nämlich die aus ihren 2. Differentialquotienten gebildete Determinante stellt gleich Null gesetzt die *Cayley*'sche Kurve von S_2 dar[534]).

531) Für die wichtigsten Beziehungen zwischen beiden Systemen vgl. *Picquet*, a. a. O. p. 96—126, sowie *Gundelfinger*, Vorl., p. 228—232, endlich *White*[475]) und *Gordan*[475]). Wir heben nur noch folgende hervor: Die Schnittpunkte der Hessiane von S_2 mit einer Geraden sind zugleich Schnittpunkte der Geraden mit den drei anderen gemeinsamen Tangenten der in dem konjugierten Gewebe enthaltenen Kurven, die jene Gerade berühren. Liegt die Gerade im Unendlichen, so folgt, dass die Asymptotenrichtungen der Hessiane durch die drei gemeinsamen Tangenten der im konjugierten Gewebe befindlichen Parabeln gegeben sind (*Picquet*, a. a. O. p. 102). Ferner sei erwähnt: Die acht Seiten zweier vollständigen Vierseite, deren Paare von Gegenecken konjugierte Pole der Hessiane des Netzes sind, also die acht Seiten zweier Polvierseite eines Netzes, sind einer Kurve des konjugierten Gewebes umschrieben (*Steiner-Schröter*, p. 481; *H. Siebeck*, Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 66; *H. Schröter*, Math. Ann. 5 (1871), p. 71). Dual folgt, dass die acht Ecken zweier Polvierecke eines Gewebes auf einer C_2 des konjugierten Netzes liegen (*Rosanes*, Math. Ann. 6 (1872), p. 278).

532) *Picquet*, a. a. O. p. 22 f.

533) Ebenda, p. 75 f.

534) Schon *Cayley* erwähnt diese Kontravariante von $\mathfrak{F}$, deren *Hesse*'sche Determinante zur Pippian von $\mathfrak{F}$ (vgl. Fussnote 481) proportional ist (Lond.

Auch die Kegelschnitte einer Schar bilden zusammen mit ihren konfokalen Kurven ein Gewebe; seine Punktepaare bestehen aus den Brennpunktepaaren der Scharkurven, daher ist (Nr. 81) die *Cayley*'sche Kurve des Gewebes der Ort der Brennpunkte der Schar, die Hessiane ist Enveloppe der Axen aller Kurven der Schar. Das konjugierte Netz wird durch gleichseitige Hyperbeln gebildet[535]).

85. Besondere Fälle[536]). Gehen alle Kurven eines Netzes durch einen und denselben Punkt P, so ist dieser ein Doppelpunkt der Hessiane; die *Cayley*'sche Kurve zerfällt in P und einen Kegelschnitt[537]). Der Punkt P gehört doppelt zählend dem konjugierten Gewebe als ausgeartete Kurve an. Umgekehrt zerfällt die Hessiane eines einen Doppelpunkt P enthaltenden Gewebes in P und den zu P gehörigen Polarkegelschnitt (Nr. 57) der Schar, die sich nach Absonderung des Doppelpunktes aus dem Gewebe ergiebt.

Haben alle Netzkurven eine gemeinsame Sehne mit den Endpunkten Q, R, so zerfällt die Hessiane in diese Sehne und einen durch Q und R gehenden Kegelschnitt. Die übrigen Sehnen, die irgend zwei Kurven dieses Netzes gemeinsam sind, gehen alle durch einen und denselben Punkt P, und die *Cayley*'sche Kurve des Netzes zerfällt in P und die zwei Punkte Q, R.[538]). Diese gehören doppelt zählend dem konjugierten Gewebe an. Die Hessiane eines Gewebes, das zwei Doppelpunkte enthält, zerfällt somit in diese zwei Punkte und den in Bezug auf irgend eine Kurve des Gewebes genommenen Pol der Geraden QR; die *Cayley*'sche Kurve eines solches Gewebes zerfällt in die Gerade QR und einen Kegelschnitt, die harmonische C_2 (Nr. 48) zu dem Punktepaar und irgend einer Kurve des Ge-

Trans. 147 (1856), p. 427 = Coll. papers 2, p. 395); auch bei *Cremona* tritt sie schon auf und wird von ihm mit K_3 bezeichnet (Bologna Mem. 12 (1861), p. 421 = deutsche Übers. von *Curtze,* Greifswald 1865, p. 232).

535) Vgl. *Schröter,* Math. Ann. 5 (1871), p. 61—82; *Picquet,* Étude géom., p. 120—124; *Th. Walter,* Progr. Gymn. Büdingen 1878; *Gundelfinger,* Vorl., p. 404—410, ferner die in Nr. 61 und 62 angegebene Litteratur.

536) Vgl. für diese speziellen Fälle *Cremona,* deutsche Übers. von *Curtze,* p. 275—278; *Picquet,* a. a. O. p. 115—126; *B. Igel,* Wien. Ber. 75 (1877), p. 445—457; *Gundelfinger,* Vorl., § 22—26.

537) Dieser Satz findet sich eigentlich schon bei *Hesse,* J. f. Math. 28 (1844), p. 78—80 = Werke, p. 101—103.

538) Den Satz, dass die irgend zwei Netzkurven noch gemeinsamen Sehnen durch einen und denselben Punkt gehen, beweist *Poncelet,* Traité Nr. 403 aus dem entsprechenden für Kreise gültigen. Analytisch bewiesen findet sich der Satz bei *Plücker,* Anal. Entw. 1, p. 241 und 257. *A. Voss,* Zeitschr. Math. Phys. 18 (1872), p. 104 nennt für drei beliebige Kegelschnitte, die eine Sehne gemeinsam haben, den Schnittpunkt der drei übrigen Sehnen den Zentralpunkt.

webes. — Sind Q, R die imaginären Kreispunkte, so hat man ein Netz von Kreisen. Seine Hessiane zerfällt in die unendlich ferne Gerade g_∞ und einen Kreis o; P wird zum Potenzmittelpunkt aller Kreise des Netzes, zugleich zum Mittelpunkt des Kreises o, der sich überhaupt als „Orthogonalkreis" aller Netzkreise erweist; das konjugierte Gewebe besteht aus allen Kegelschnitten, die o zum Direktorkreis haben[539]).

Natürlich bilden auch alle C_2, die durch einen fest gegebenen Punkt gehen und zu denselben zwei Punktepaaren konjugiert liegen, ein Netz; ebenso die durch zwei feste Punkte gehenden und einem Punktepaar konjugierten Kegelschnitte[540]).

Haben alle C_2 eines Netzes drei Punkte P, Q, R gemeinsam, so besteht die Hessiane aus deren Verbindungslinien, die *Cayley*'sche Kurve aus den drei Punkten selbst. Das konjugierte Gewebe wird durch die Kegelschnitte gebildet, die PQR zum Poldreiseit haben, und hat gleichzeitig die Eigenschaften eines Netzes und eines Gewebes. Dasselbe wurde von *K. Meister* näher untersucht[541]).

Wir verzichten auf die Wiedergabe aller den angeführten speziellen Sätzen dual entsprechenden, nur einige seien hervorgehoben. Die Hessiane aller Kurven eines Gewebes mit gemeinsamer Tangente t ist eine C^3, die t zur Doppeltangente hat; die *Cayley*'sche Kurve zerfällt in die Gerade t und den Polkegelschnitt N der Geraden t (Nr. **49**) in Bezug auf das Kegelschnittbüschel, das sich nach Absonderung von t aus dem konjugierten Netz ergiebt. Die Berührungspunkte der Doppeltangente t mit der Hessiane sind zugleich die Schnittpunkte von N mit t. Sind die Kurven des Gewebes sämtlich Parabeln und berührt die unendlich ferne Gerade die Hessiane in den imaginären Kreispunkten, so ist N ein Kreis, und das konjugierte Netz wird durch gleichseitige Hyperbeln gebildet, die sämtlich dieselben Asymptoten haben wie die gleichseitigen Hyperbeln eines gewissen Büschels solcher Kurven. Die Hessiane des Gewebes, zugleich die *Cayley*'sche Kurve des konjugierten Netzes gleichseitiger Hyperbeln, wird eine

539) Vgl. *Picquet*, a. a. O. p. 117, sowie *Gundelfinger*, Vorl., p. 389 f. Der Ausdruck Orthogonalkreis rührt von *Plücker*, Anal. Entw. 1, p. 52 her. Die geometrische Bedeutung des Kreises hat schon *Steiner*, J. f. Math. 1 (1826), p. 166 = Werke 1, p. 24. Auch umgekehrt bilden alle Kreise, die einen gegebenen Kreis k rechtwinklig schneiden, ein Netz, dessen Hessiane in k und g_∞ zerfällt. Vgl. *Schröter*, Math. Ann. 6 (1872), p. 110 f.

540) Vgl. für beide Netze *Picquet*, a. a. O. p. 25—31.

541) Zeitschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 321—347. Vgl. auch *E. Kurtz*, Diss. Münster 1900.

Hypocykloide mit drei Spitzen[542]). Die Geradenpaare des Netzes sind die Asymptoten der Hyperbeln, die genannte Hypocykloide ist daher Enveloppe dieser Asymptotenpaare (vgl. auch Nr. **55** und **63**). Interessant ist auch der Fall, wo die Kurven des Gewebes zwei gemeinsame Tangenten haben, bestehend aus den von einem festen Punkt F nach den imaginären Kreispunkten gezogenen Geraden; sie haben dann F zum Brennpunkt und sind überdies einem Kegelschnitt harmonisch eingeschrieben[543]).

G. Invarianten von zwei und drei Kegelschnitten.

86. Simultane Invarianten zweier C_2. Ein einziger Kegelschnitt $f(x, x) = 0$ hat nur drei Invarianten: die Form f selbst, die zugehörige (oder adjungierte) Form $F(u, u)$ und die Determinante A (vgl. Nr. 8, sowie I B 2, Nr. 2).

Das volle System [I B 2, Nr. 6] der Invarianten *zweier* ternärer quadratischer Formen wurde zuerst von *P. Gordan* aufgestellt und von *F. Lindemann* mitgeteilt[544]); es besteht aus zwanzig Bildungen. Sind f und g die gegebenen Formen, so treten zunächst ausser diesen die vier eigentlichen Invarianten A, H, Θ, B auf, die bis auf Zahlenfaktoren mit den Koeffizienten von λ^0, λ^1, λ^2, λ^3 in der Determinante von $\lambda g - f$ übereinstimmen (vgl. (61) in Nr. 82), ferner die Koeffizienten F, $-2H$ und G von λ^0, λ^1, λ^2 in der linken Seite der zu $\lambda g - f = 0$ gehörigen Gleichung in Linienkoordinaten. Hier sind F und G die „zugehörigen Formen“ von f und g, während $H = 0$ die harmonische Kurve 2. Klasse (Nr. 48) von f und g darstellt; ihr entspricht dual die Kovariante $\chi(x, x)$, die gleich Null gesetzt die harmonische Kurve 2. Ordnung von f und g darstellt. Für diese Invarianten bestehen Beziehungen wie:

$$(66) \qquad \begin{cases} Bf = -2H(g_1, g_2, g_3) + 3\Theta g, \\ 2\chi = -F(g_1, g_2, g_3) + 3\mathsf{H}g, \qquad (g_i = \tfrac{1}{2}g'(x_i) \end{cases}$$

---

542) *Cremona* zeigte J. f. Math. 64 (1864), p. 101—123, wie sich die wichtigsten Eigenschaften dieser Kurve aus den Untersuchungen von *Hesse* und *Cayley* über C_3 ergeben. Vgl. auch *Picquet*, a. a. O. p. 116, sowie *Gundelfinger*, Vorl., p. 410—415. Bezüglich der übrigen Litteratur vgl. Nr. **55** und **63**, sowie III C 3.

543) Näheres bei *Picquet*, a. a. O. p. 118 f.; andere spezielle Fälle bei *Gundelfinger*, Vorl., p. 394—415. Das Gewebe von Kegelschnitten, die ein gegebenes Tangentendreiseit haben, untersuchte *H. J. Pilgram*, Diss. inaug. Erlangen 1902.

544) *Clebsch-Lindemann*, Vorl. 1, p. 288—302.

und die hieraus durch Vertauschung der a_{ik} und b_{ik} hervorgehenden[545]).

Ferner ist zu erwähnen eine Zwischenform (vgl. I B 2, Nr. 2) $B_1 = \binom{u}{g}_{a_{ik}}$, wo $B_1 = 0$ bei variabelen u den in Bezug auf f genommenen Pol der in Bezug auf g genommenen Polare eines Punktes x darstellt. (Bezüglich der abkürzenden Schreibweise $\binom{u}{g}_{a_{ik}}$ vgl. Nr. 8). Bei variabelen x ist $B_1 = 0$ eine Gerade von solcher Art, dass die in Bezug auf g genommenen Polaren ihrer Punkte konjugiert sind zu der Geraden $u_x = 0$ in Bezug auf $f = 0$. Man könnte auch sagen: die Gerade $B_1 = 0$ hat in Bezug auf g denselben Pol wie $u_x = 0$ in Bezug auf f. Analoge Bedeutung hat $B_2 \equiv \binom{u}{f}_{b_{ik}}$. Die Zwischenform

$$N \equiv \frac{1}{4} \sum \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} u_3 \right) \tag{67}$$

ist gleich Null gesetzt der Polkegelschnitt der Geraden u in Bezug auf das Büschel $\lambda g - f$ (Nr. **49**);

$$\mathsf{N} \equiv \frac{1}{4} \sum \pm \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial G}{\partial u_2} x_3 \right) \tag{68}$$

liefert (Nr. **57**) den Polarkegelschnitt des Punktes x in Bezug auf die Schar $\lambda G - F = 0$. Die Formen N und N sind Kombinanten, d. h. solche Invarianten, die sich bei Substitution von $\varkappa_1 f + \lambda_1 g$ und $\varkappa_2 f + \lambda_2 g$ an Stelle von f und g bis auf eine Potenz von $\varkappa_1 \lambda_2 - \varkappa_2 \lambda_1$ als Faktor reproduzieren (I B 2, Nr. **24**). Noch vier weitere Zwischenformen sind vorhanden: C_1, C_2, Γ_1, Γ_2. Die Form C_1 ist die Funktionaldeterminante von B_1, f und u_x, somit $C_1 = 0$ die Bedingung, dass die Polare eines Punktes x in Bezug auf f durch den Schnittpunkt der Geraden B_1 und u geht. Auch als Funktionaldeterminante von F, H und x_u ist C_1 darstellbar. Die Form C_2 geht aus C_1 durch Vertauschung von f und g hervor. Den Formen C_1 und C_2 entsprechen dual Γ_1 und Γ_2; sie stehen mit F und G in demselben Zusammenhang wie C_1 und C_2 mit f und g, nur sind natürlich Differentiationen nach x_i zu ersetzen durch solche nach u_i. Endlich hat man noch zwei duale Formen D und Δ, beide vom 3. Grad in den Koeffizienten von f und g, während D die u_i, Δ die x_i im 3. Grad enthält. $D = 0$ stellt das Produkt der drei Ecken, $\Delta = 0$ das der drei Seiten des gemeinsamen Pol-

545) Die Beziehung $3(\Theta f - \mathsf{H} g) = G(f_1, f_2, f_3) - F(g_1, g_2, g_3)$ hat bereits *Ferrers*, Quart. J. 7 (1866), p. 20; er benutzt sie bei der Frage nach der Bedeutung des gleichzeitigen Verschwindens von Θ und H. Vgl. auch *Gundelfinger*, Vorl. § 17, sowie § 3 des 3. Supplementes zur 3. Aufl. von *Hesse*'s „Vorl. über anal. Geom. des Raumes".

dreiecks von f und g dar. Beide Formen sind wieder Kombinanten von f und g. Setzt man die Form N gleich $N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$, so ist übrigens Δ gleichbedeutend mit

$$\sum \pm \left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1} \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \frac{\partial N_3}{\partial x_3}\right), \tag{69}$$

und in analoger Beziehung steht das Produkt ABD zu N.[546]) Ferner lässt sich Δ darstellen als Funktionaldeterminante von f, g und χ, analog D als solche von F, G und H.

Im ganzen hat man 4 reine Invarianten, 4 reine Kovarianten, 4 Kontravarianten und 8 Zwischenformen (gemischte Kovarianten).

87. Beziehungen zwischen einzelnen Formen. Alle simultanen Formen von f und g sind ganze Funktionen dieses Systems S von 20 Invarianten. *Gordan* hat die Darstellung solcher Funktionen für einige wichtige simultane Formen gegeben[547]); es sei hier nur erwähnt eine gewisse dreireihige Determinante $\mathfrak{H}$ (bei *Gordan* H), sowie die *Taktinvariante* T von f und g. Die Bedingung $T = 0$ für die einfache Berührung der beiden Kurven ergiebt sich auch als dreireihige Determinante. Ferner zeigt *Gordan* an mehreren Fällen, wie sich die Quadrate und die Produkte je zweier im System S enthaltenen schiefen Invarianten (formes gauches [I B 2, Nr. 2], es sind dies die Formen Δ, D, N, N, C_1, C_2, Γ_1, Γ_2) sowie ihre geraden Überschiebungen [I B 2, Nr. 14] als ganze Funktionen der übrigen Formen ausdrücken lassen. Die Quadrate und Produkte je zweier der drei Formen f, g, χ stellt er als lineare Funktionen der Unterdeterminanten von $\mathfrak{H}$ dar. Durch Adjunktion einer beliebigen Geraden $w_x = 0$, deren Pole in Bezug auf F, G und H man als Ecken eines Koordinatendreiecks wählt, werden f, g, χ in rationaler Weise „typisch dargestellt“ [I B 2, Nr. 7].

Auch *R. Perrin*[548]) hat das vollständige System aufgestellt; ferner zeigte er, dass die Invarianten eines Systems zweier linearen und zweier quadratischen *binären* Formen Leitglieder der invarianten Bildungen zweier C_2 sind. Mit Hülfe der bekannten Syzygien (Relationen, I B 2, Nr. 8) zwischen den genannten binären Grundformen gelangt man so unmittelbar zu den Syzygien der zwei ternären Formen[549]).

546) *Gundelfinger,* Vorl., p. 206 f.

547) Math. Ann. 19 (1882), p. 528—552.

548) Par. soc. math. Bull. 18 (1890), p. 1—80. Das Prinzip seiner Methode, die Invarianten eines „associierten“ Systems von Formen beliebig vieler Veränderlichen aufzusuchen, hat *Perrin*, Paris C. R. 104 (1887), p. 108—111, 220—222, 280—282 mitgeteilt [I B 2, Nr. 7].

549) *Perrin* behandelt dieses System binärer Formen in Par. soc. math. Bull. 15 (1887), p. 45—61. *Perrin* [548]) leitet 67 Syzygien ab; eine der wichtigsten drückt

88. **Taktinvariante. Kombinante $\psi(x, x)$.** Auf einige besonders wichtige Invarianten möge noch näher eingegangen werden. So z. B. auf die Taktinvariante T (Nr. 87). Man erhält sie, wie schon in Nr. 46 erwähnt, als Diskriminante der kubischen Gleichung (61): $C(\lambda) \equiv \lambda^3 B - 3\lambda^2 \Theta + 3\lambda \mathsf{H} - A = 0$, nämlich:

$$T \equiv 4(B\mathsf{H} - \Theta^2)(A\Theta - \mathsf{H}^2) - (\mathsf{H}\Theta - AB)^2. \tag{70}$$

Im Falle der Oskulation hat die kubische Gleichung drei gleiche Wurzeln; wie in der Theorie der binären kubischen Formen gezeigt wird, muss dann $B : \Theta = \Theta : \mathsf{H} = \mathsf{H} : A$ sein. Die Kegelschnitte berühren sich in zwei verschiedenen Punkten, wenn die der Doppelwurzel λ_1 entsprechende Ausartung $\lambda_1 g - f = 0$ eine Doppelgerade darstellt, d. h. wenn $F - 2\lambda_1 H + \lambda_1^2 G \equiv 0$. Da ausserdem λ_1 schon gemeinsame Wurzel der Ableitungen $\lambda_1^2 B - 2\lambda_1 \Theta + \mathsf{H} = 0$ und $\lambda_1^2 \Theta - 2\lambda_1 \mathsf{H} + A = 0$ der kubischen Gleichung in λ ist, erhält man durch Elimination von λ_1 und λ_1^2 die Determinante:

$$\begin{vmatrix} F & H & G \\ \mathsf{H} & \Theta & B \\ A & \mathsf{H} & \Theta \end{vmatrix} = 0, \tag{71}$$

und durch Benutzung der dual entsprechenden Gleichungen ergiebt sich noch eine andere ähnliche Relation. Im Falle der doppelten Berührung ist der Kegelschnitt $\chi = 0$ dem Büschel $\lambda g - f = 0$ angehörig. Denn $\chi = 0$ geht (Nr. 48) allgemein durch die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von f und g hindurch; berühren sich diese Kurven in einem Punkte, so berührt daselbst auch $\chi = 0$, da den Kurven f und g daselbst die Tangente gemeinsam ist. Gleiches gilt von dem Kegelschnitt $H = 0$. Die Oskulation geht in eine vierpunktige Berührung über, wenn für die dreifache Wurzel von $C(\lambda) = 0$ der Ausdruck $F - 2\lambda_1 H + \lambda_1^2 G$ identisch verschwindet[550]).

Gundelfinger[551]) giebt die Kriterien für die einzelnen Fälle der

---

das Produkt ΔD aus durch B_1, B_2, u_x und die vier reinen Invarianten. Überhaupt giebt er die Ausdrücke für die 8 Quadrate und 28 Produkte je zweier der acht schiefen Formen. Mehrere Syzygien benutzt er zur Ableitung geometrischer Resultate und Aufstellung der Gleichungen gewisser kovarianter Kurven. Auch *C. Reuschle* (Verh. des 1. internat. Math.-Kongr. in Zürich, Leipzig 1898, p. 128—139) hat die Invarianten zweier Kegelschnitte abgeleitet, und zwar auf Grund einfacher Polaren- und Eliminationsprozesse mit Hülfe seiner Konstituententheorie.

550) Vgl. *Salmon-Fiedler,* Kegelschn., § 358, § 368, § 370 und § 371. Eine andere Behandlung der Berührung zweier C_2 giebt *Perrin,* a. a. O. [548])

551) Für das nähere vgl. Vorl., p. 372—376.

Berührung wie für die Realität der Schnittpunkte (vgl. Nr. **46**) mit Hülfe einer Kombinante (I B 2, Nr. **24**) $\psi(x, x)$ nebst zugehöriger Form $\Psi(u, u)$, wo sich ψ auch darstellen lässt in der Gestalt: $3F(u,u) - 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) H(u,u) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) G(u,u)$, wenn man hier u_i durch $\frac{1}{2} g'(x_i)$ ersetzt; λ_1, λ_2, λ_3 sind dabei die Wurzeln von $C(\lambda) = 0$. Für $\Psi(u, u)$ findet man $162(h_{11}F + 2h_{12}H + h_{22}G)$, wobei $h_{11} = B\mathsf{H} - \Theta^2$, $2h_{12} = \Theta\mathsf{H} - AB$, $h_{22} = A\Theta - \mathsf{H}^2$. *Gundelfinger* hat überhaupt den Kegelschnitt ψ genauer untersucht und ist dabei u. a. zu folgenden Resultaten gelangt[552]). Mit f, g und χ steht ψ in der Beziehung $-\frac{1}{9}\psi = \Theta f + \mathsf{H} g - 2\chi$. Durch jede Ecke des gemeinsamen Poldreiecks von f und g gehen bekanntlich ein Geradenpaar des Büschels und zwei Seiten des Dreiecks; diese zwei Linienpaare bestimmen eine Involution, deren Doppelstrahlen die Kurve ψ in deren Schnittpunkten mit der dritten Dreiecksseite berühren. Ferner wird ψ von allen Geraden eingehüllt, die die zwei äquianharmonischen Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Büschels in harmonischen Punktepaaren treffen und ist auch Ort aller Punkte, von denen sich an diese zwei Kurven harmonische Tangentenpaare legen lassen, d. h. ψ ist zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ harmonische C_2 und harmonische C^2 (vgl. Nr. **53** und **48**). Mit ψ bilden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein System dreier Kegelschnitte, von denen je zwei einander in Bezug auf den dritten „als Direktrix polar entsprechen", d. h. die in Bezug auf eine der drei Kurven genommenen Polaren von Punkten einer anderen Kurve des Systems umhüllen die dritte[553]); je zwei der Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ψ sind einander harmonisch eingeschrieben und umschrieben. Ebenso ist ψ jedem der Kegelschnitte

552) Zeitschr. Math. Phys. 20 (1874), p. 156—159; Vorl., p. 207 f. und 368—371.

553) *Ferrers,* Quart. J. 7 (1866), p. 21 f. gelangt zu drei Kegelschnitten, die in dieser Beziehung zu einander stehen, indem er fragt, was es bedeutet, wenn bei zwei gegebenen Kegelschnitten die Invarianten Θ und H verschwinden. Auch erwähnt er, dass immer die eine von drei solchen Kurven Ort aller Punkte ist, von denen sich an die zwei anderen harmonische Tangentenpaare legen lassen. Die Beziehung solcher drei Kurven zum Büschel, insbesondere die Thatsache, dass es in jedem Büschel zwei Kurven giebt, für die Θ und H verschwinden, kannte *Ferrers* noch nicht. Vgl. auch Fussn. 508. Wieder auf anderem Wege gelangte *Rosanes,* Math. Ann. 2 (1870), p. 552 zu drei Kegelschnitten obiger Art, gleichfalls ohne zu erwähnen, dass in jedem Büschel zwei solche Kurven enthalten sind. Hingegen bemerkte *Rosanes,* dass für je zwei der drei Kurven die zugehörige harmonische C_2 und die harmonische C^2 mit der dritten zusammenfallen. Vgl. ferner *G. Battaglini* in der von *L. Cremona* und *E. Beltrami* herausgegebenen Schrift: „In memoriam Dominici Chelini Collectanea mathem.", Mailand 1881, p. 36; *G. Kohn,* Wien. Ber. 93 (1886), p. 314—336 und 349 f.

f und g harmonisch eingeschrieben[554]) (Nr. 83), wie auch allen Kurven des Büschels $\lambda g - f = 0$. *Gundelfinger* bemerkt ferner, dass jeder der drei harmonischen Kegelschnitte des Büschels (Nr. 53) mit ψ eine doppelte Berührung eingeht, wobei die Berührungssehnen die Seiten des gemeinsamen Poldreiecks des Büschels sind. Die bei der Kegelschnittschar $\mu G - F = 0$ auftretende zu ψ duale Kombinante φ ist als Kegelschnitt der vierzehn Punkte mehrfach behandelt. Es lassen sich nämlich leicht vierzehn seiner Punkte bestimmen[555]), ebenso wie man leicht vierzehn Tangenten von ψ (Kegelschnitt der vierzehn Geraden) angeben kann, nämlich ausser den oben genannten sechs Doppelstrahlen dreier Involutionen noch die vier Geradenpaare, von denen sich je eins durch jede Ecke des Vierecks der Grundpunkte von $\lambda g - f = 0$ der Art ziehen lässt, dass jede dieser Geraden mit der durch die betreffende Ecke gehenden Diagonale und dem durch die Ecke gehenden Seitenpaar ein äquianharmonisches System bildet. Jedenfalls dürfte ψ von wichtigerer Bedeutung für das *Büschel* sein als φ, zumal ψ mit den drei Kovarianten f, g, χ in so einfacher Beziehung steht, während φ eine ziemlich komplizierte Kombination von Formen niedrigerer Ordnung ist[556]).

89. Quadratische ternäre und biquadratische binäre Formen. *Burnside* bemerkte, dass sich die Invariantentheorie für die biquadratische binäre Form der für die quadratische ternäre Form unterordnet. Durch die Substitution von x_1, x_2, x_3 an Stelle von x_1^2, $2x_1x_2$, x_2^2 geht nämlich die Form:

$$(72) \qquad q \equiv a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4$$

über in:

$$(73) \qquad f \equiv a_0x_1^2 + a_2x_2^2 + a_4x_3^2 + 2a_3x_2x_3 + 2a_2x_3x_1 + 2a_1x_1x_2, \quad \text{wobei } g \equiv 4x_1x_3 - x_2^2 = 0.$$

Die Diskriminante von $\lambda g - f$ wird hier $4\lambda^3 - i\lambda - j$, unter

$$(74) \qquad \begin{cases} i \equiv a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \\ j \equiv a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 \end{cases}$$

die Invarianten der Form q verstanden [I B 2, Nr. 8, Anm. 169]. Es wird also hier H gleichbedeutend mit i, A mit j, während Θ verschwindet. Ferner zeigt sich, dass die Kovariante χ von f und g gleichbedeutend

554) *J. Casey*, „A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle, and conic sections", 2. Aufl., Dublin 1893, p. 490.

555) *Salmon-Fiedler*, Kegelschn., p. 652; *Casey*, a. a. O. p. 486—490.

556) *Gundelfinger*, Zeitschr. Math. Phys. 20 (1874), p. 159; Vorl., p. 377.

wird mit der *Hesse*'schen Kovariante von q. Die Diskriminante von q ist Taktinvariante von f und g. Analog lassen sich die invarianten Eigenschaften des aus einer biquadratischen und einer quadratischen binären Form bestehenden Systems an die Betrachtung zweier Kegelschnitte und einer Geraden anknüpfen[557]).

90. Invarianten dreier Kegelschnitte. In analoger Weise wie *Gordan* das volle System der Invarianten zweier Kegelschnitte abgeleitet hat, geschah dies [I B 2, Nr. 6] bei drei Kegelschnitten f, g, h durch *C. Ciamberlini*[558]); er findet im ganzen 127 Bildungen. *E. Fischer* und *K. Mumelter*[559]) berechnen das System nach einer von *F. Mertens*[560]) gegebenen Methode, gelangen aber zu 185 Bildungen (11 Invarianten, 38 Kovarianten, 38 Kontravarianten und 98 Zwischenformen); sie haben ihr Ergebnis mit dem von *Ciamberlini* leider nicht verglichen. Ausser den Invarianten je zweier der drei Formen gehören zu den simultanen Invarianten natürlich die *Hesse*'sche und *Cayley*'sche Form des Netzes:

$$\varkappa f(x,x) + \lambda g(x,x) + \mu h(x,x) = 0. \tag{75}$$

Wir erwähnen ferner z. B. den Ort aller Punkte, deren Polaren hinsichtlich zweier der drei Kegelschnitte in Bezug auf den dritten konjugiert sind. Zehn reine Invarianten liefert die Diskriminante D von (75) als Koeffizienten der verschiedenen Potenzen und Produkte von $\varkappa, \lambda, \mu$. Mit Ausnahme des Koeffizienten Θ_{123} von $\varkappa\lambda\mu$ sind diese Invarianten solche, die zu f, g, h einzeln, oder zu je zweien dieser drei Formen gehören[561]). — Auch mehrere andere Grundformen des Systems oder aus diesen abgeleitete Formen waren vor *Ciamberlini* schon bekannt; so stellt z. B. bereits *J. J. Sylvester* die Resultante R der drei Formen ($R = 0$ Bedingung, dass f, g, h und somit alle Kurven des Netzes (75) durch einen und denselben Punkt gehen) durch einen Ausdruck dar[562]) von der Form $3R = 4S_1 - P^2$, wobei die Kombinante S_1 die Koeffizienten jeder der drei Formen f, g, h im 4. Grad enthält und die *Aronhold*'sche Invariante S sowohl der

---

557) Näheres bei *Burnside*, Quart. J. 10 (1869), p. 211—218; vgl. auch *F. Hofmann*, Zeitschr. Math. Phys. 32 (1886), p. 363—368.

558) Giorn. di mat. 24 (1886), p. 141—157.

559) Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 97—114.

560) Wien. Ber. 99 (1890), p. 367—384.

561) *Burnside*, a. a. O. p. 242. Die bei symbolischer Schreibweise selbstverständliche geometrische Bedeutung des Verschwindens von Θ_{123} erwähnt *J. Kraus*, Diss. inaug. Giessen 1886, p. 20: Jede der drei Kurven f, g, h ist zu der den zwei anderen zugehörigen harmonischen Kurve 2. Klasse konjugiert.

Hessiane von (75) als auch der als ternäre kubische Form von x, λ, μ betrachteten Diskriminante D ist, während sich die Kombinante P^2 nach *Burnside*[563]) durch acht andere Invarianten ausdrückt. Sind f, g, h die Differentialquotienten einer ternären kubischen Form $\mathfrak{F}$, so ist P die *Aronhold*'sche Invariante T dieser Form, S_1 wird die *Aronhold*'sche Form S der zu $\mathfrak{F}$ gehörigen *Hesse*'schen Determinante. *Cayley*[564]) zeigte, dass alsdann $S_1 = P^2 - 48S^3$ ist (unter S die *Aronhold*'sche Invariante S von $\mathfrak{F}$ verstanden), und $R = P^2 - 64S^3$ wird identisch mit der Diskriminante von $\mathfrak{F}$. *Hermite* stellt R *allgemein* dar in der Form $T^2 - 64\Sigma$, und hier ist Σ eine Kombinante, die sich auf S^3 reduziert, falls f, g, h Differentialquotienten einer Form $\mathfrak{F}$ sind[565]). Auch *Burnside*[566]) hat für R den Ausdruck $T^2 - 64\Sigma$, doch giebt er für Σ eine ganz andere Art der Ableitung an; ferner zeigte er, durch welche zwei Relationen T und Σ (bei ihm P und Q) mit den zehn oben erwähnten und einer elften Invariante zusammenhängen[567]). *Gundelfinger*[568]) führte die Untersuchungen von *Hermite* weiter aus und zeigte, dass sich jede Invariante des Systems rational durch die eben erwähnten zehn Invarianten und durch T ausdrückt, jede Kombinante rational und ganz durch Σ und T (bei ihm s und t)[569]). Auch giebt er eine Gleichung an, die im Falle $R = 0$ den gemeinsamen Punkt der Kurven f, g, h dreifach zählend darstellt, ferner entwickelt er die Bedingungen dafür, dass die Kurven zwei oder auch drei Punkte gemeinsam haben[570]). Im Falle $\Sigma = 0$ besitzt, wie

---

562) Cambr. Dubl. math. J. 8 (1853), p. 267. Man vgl. übrigens hierzu auch *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), p. 68—96 = Werke, p. 89—122.

563) A. a. O. p. 243 f.

564) J. f. Math. 57 (1859), p. 143 ff. = Coll. pap. 4, p. 353 ff.

565) J. f. Math. 57 (1860), p. 372 f. *B. Igel*, Wien. Ber. 77 (1878), p. 783 ff. geht von der Theorie der ternären kubischen Formen aus und folgert aus ihr den Ausdruck für die Resultante R.

566) Quart. J. 10 (1869), p. 239—247. Bei *Hermite* ist Σ eine Determinante 3. Grades, bei *Burnside* (mit Q bezeichnet) eine vom 6. Grad. Die Identität beider bewies *Igel*, Wien. Ber. 74 (1876), p. 365, sowie Monatsh. Math. Phys. 5 (1894), p. 301 f. Übrigens ist der Determinante bei *Burnside* und ebenso bei *Salmon-Fiedler*, Kegelschn., p. 684 ein Minuszeichen vorzusetzen.

567) Später geschah dies noch von *F. Gerbaldi*, Tor. Atti 25 (1890), p. 390—396, der auch R durch die elf Invarianten ausdrückt. Letzteres thut ebenfalls *A. R. Johnson*, Lond. math. soc. Proc. 21 (1890), p. 434 f.

568) J. f. Math. 80 (1874), p. 73—82.

569) Auch von *F. Mertens*, Wien. Ber. 93 (1886), p. 62—77 werden diese zwei Thatsachen bewiesen.

570) Solche Bedingungen wurden auch von *J. J. Walker*, Lond. math. soc. Proc. 4 (1873), p. 404—416 aufgestellt.

gleichfalls gezeigt wird, die *Cayley*'sche Kurve des Netzes (75) eine Doppeltangente. Sie ist als Doppelgerade in dem Netz (75) enthalten; die Gleichung, die sie doppelt zählend darstellt, wird angegeben. Der symbolische Ausdruck der Bedingungen $\Sigma = 0$ und $R = 0$ findet sich bei *Clebsch* [571]).

571) *Clebsch-Lindemann*, Vorl. 1, p. 526; vgl. hierzu noch *Gordan*, J. de math. (5) 3 (1897), p. 195—201.

(Abgeschlossen im Januar 1903.)

Neuester Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Vierzehntes Heft. Mit 113 Figuren im Text. [VIII u. 337 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 16.—

Inhalt: Axel Anthon Björnbo: Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. — Heinrich Suter: Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke". — Karl Bopp: Antoine Arnauld, der grofse Arnauld, als Mathematiker.

Bachmann, Professor Dr. **Paul**, niedere Zahlentheorie. In 2 Teilen. I. Teil. [X u. 402 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 14.—

Bardey, Dr. **Ernst**, algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage, bearbeitet von Friedrich Pietzker. [XIII u. 420 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 8.—

Berichte, Mathematische und Naturwissenschaftliche aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von August Heller. 17. Band. [VII u. 364 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 8.—

——— ——— 18. Band erscheint im Februar.

Brüsch, Dr. phil. **Wilhelm**, Oberlehrer, Grundrifs der Elektrotechnik für technische Lehranstalten. Mit 248 Abbildungen im Text. [XI u. 168 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 3.—

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Functionen. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. gr. 8. geh. 1. Lfg. [176 S.] 1901. n. *M.* 5.60; 2. Lfg. [S. 177—400.] 1902. n. *M.* 7.60.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. *M.* 16.—; II. Teil. [IV u. 291 S.] n. *M.* 14.—

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. *M.* 24.—

Darwin, G. H., Professor an der Universität Cambridge, Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der zweiten englischen Auflage von A. Pockels. Mit 43 Illustrationen im Text. [XXII u. 344 S.] 8. 1902. Eleg. geb. *M.* 6.80.

Fischer, Dr. **Karl T.**, der naturwissenschaftliche Unterricht in England, insbesondere in Physik und Chemie. Mit einer Übersicht der englischen Unterrichtslitteratur zur Physik und Chemie und 18 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln. [VIII u. 94 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 3.60.

——— neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper. Mit einem Anhange über das absolute Mafssystem. Ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts. Mit 55 Figuren im Text. [VI u. 68 S.] gr. 8. 1902. geb. *M.* 2.—

Föppl, Prof. Dr. **Aug.**, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden, gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. *M.* 44.—

I. Band. **Einführung in die Mechanik.** (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geb. n. *M.* 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII. u. 471 S.] 1903. geb. n. *M.* 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. *M.* 12.—
IV. — Dynamik. [XIV u. 456 S.] 1899. geb. n. *M.* 12.—

Gleichen, Dr. **A.**, Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen). Band VIII. Mit 251 Figuren im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 20.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. geh. n. *M.* 14.—

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 1.—

UNIVERSITY OF MAINE
3 7550 01697242 5

Hammer, Dr. E., sechsstellige Tafel der Werte $\log \frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments $\log x$ von 3.0—10 bis 9.99000—10. (Vom Argument 9.99000—10 an bis 9.999700—10 sind die $\log \frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig). [IV u. 73 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 3.60.

Hensel, K., und **G. Landsberg,** Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. *M.* 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. *M.* 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 10.—

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 1.60.

Loria, Dr. Gino, ord. Professor der Geometrie an der Universität Genua, spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Mit 74 Figuren auf 7 lithographierten Tafeln. [XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 28.— (Auch in 2 Teilen zu *M.* 16.— u. *M.* 12.—)

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 20.—

Netto, E., Lehrbuch der Kombinatorik. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. VII. Band. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 9.—

Netto, E., Vorlesungen über Algebra. 2 Bde. II. Bd. 2. (Schluß-) Lieferung. [XI u. S. 193—327.] gr. 8. 1900. geh. n. *M.* 10.—

———— II. Abteilung. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte V—VIII, X, XI des I. und I, II, V des II. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. Mit 19 Figuren im Text. [XI u. 304 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 7.20, in Leinwand geb. n. *M.* 8.—

Perry, Dr. John, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, o. Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Oberingenieur am städtischen Elektrizitätswerke zu Minden i. W. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 12.—

Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 6.—

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 6.—

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. Erster Jahrgang. Sonderabdruck aus dem Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. II. Band. 3. u. 4. (Doppel-) Heft und III. Band. Heft 1—4. [IV u. 66 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 2.40.

Stolz, O. und **J. A. Gmeiner,** theoretische Arithmetik. Zweite umgearbeitete Auflage ausgewählter Abschnitte der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band IV. [XI u. 402 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. *M.* 10.60.

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Bearbeitet von E. Study. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1902. geh. *M.* 21.—, in Halbfranz geb. *M.* 23.—

S0-GBH-014